BLOQUE A

22_ EJERCICIO 1 – Junio (modelo 1) 2022

(2'5 puntos) Una pastelería decide preparar dos tipos de cajas de pastelitos para regalar a los clientes en su inauguración. En total dispone de 120 piononos y 150 pestiños. En la caja del primer tipo habrá 3 piononos y 2 pestiños y en la segundo tipo 4 piononos y 6 pestiños. Deben de preparar al menos 9 cajas del segundo tipo.

Determine cuantas cajas de cada tipo deberá preparar para realizar el máximo número de regalos posible. En este caso, indique cuantos piononos y cuantos pestiños se utilizarán.

Solución

Es un problema de programación lineal.

Sea x = nº de cajas de tipo A.   Sea y = nº de cajas de tipo B.

	Piononos	Pestiños	Relación
Caja A (x)	3	2	
Caja B (y)	4	6	$y \geq 9$
Total	120	150	

De "caja del primer tipo 3 piononos y del segundo tipo 4 piononos" $\rightarrow 3x + 4y \leq 120$.
De "caja del primer tipo 2 pestiños y del segundo tipo 6 pestiños" $\rightarrow 2x + 6y \leq 150$.
De "Deben de preparar al menos 9 cajas del segundo tipo" $\rightarrow y \geq 9$.
De "Se preparar alguna caja del tipo A o del tipo B" $\rightarrow x \geq 0,\ \ y \geq 0$

Tenemos que la función beneficio a optimizar es F(x, y) = x + y. (piden el nº de piononos y de pestiños)

Resumiendo:
Función a optimizar es F(x, y) = x + y.
Restricciones: $3x + 4y \leq 120$; $2x + 6y \leq 150$; $y \geq 9$; $x \geq 0$.

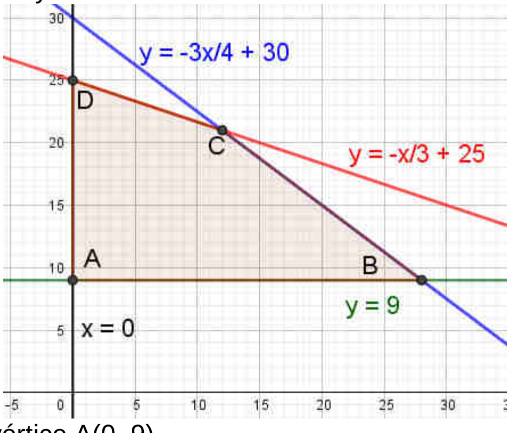
Las desigualdades $3x + 4y \leq 120$; $2x + 6y \leq 150$; $y \geq 9$; $x \geq 0$, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, $3x + 4y = 120$; $2x + 6y = 150$; $y = 9$; $x = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$$y = -3x/4 + 30;\quad y = -x/3 + 25;\quad y = 9;\quad x = 0.$$

Representamos gráficamente el recinto cerrado convexo delimitado por las desigualdades, y observamos que los vértices de dicho recinto son el A, B, C y D.

Calculamos dichos vértices A, B, C y D resolviendo las ecuaciones de dos en dos.



De $y = 9$ y $x = 0$, tenemos el vértice A(0, 9).

De $y = 9$ e $y = -3x/4 + 30$, tenemos $9 = -3x/4 + 30 \rightarrow 36 = -3x + 120$, con lo cual $3x = 84$ luego resulta $x = 28$, y el vértice es B(28, 9).

De $y = -3x/4 + 30$ e $y = -x/3 + 25$, tenemos $-3x/4 + 30 = -x/3 + 25 \rightarrow -9x + 360 = -4x + 300 \rightarrow 60 = 5x$, con lo cual $x = 12$, $y = -(12)/3 + 25 = 21$, y el vértice es C(12, 21).

De $y = -x/3 + 25$ y $x = 0$, tenemos $y = 25$, y el vértice es D(0, 25).

Veamos el máximo de la función **F(x, y) = x + y** en el recinto anterior, así como el punto donde se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa de limitada por las restricciones, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos *F* en los puntos anteriores A(0, 9), B(28, 9), C(12, 21) y D(0, 25). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

$F_A(0, 9) = (0) + (9) = 9$; **$F_B(28, 9) =$** $(28) + (9)$ **$= 37$**;
$F_C(12, 21) = (12) + (21) = 33$; $F_D(0, 25) = (0) + (25) = 250$.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 37** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice B(28, 9), es decir para realizar el máximo número de cajas regalo posible hay que preparar 28 cajas del primer tipo y 9 del segundo tipo.**

Como me piden el número de piononos y de pestiños, tenemos:
Número de piononos = $28\cdot 3 + 9\cdot 4$ **= 120 piononos.**
Número de pestiños = $28\cdot 2 + 9\cdot 6$ **= 110 pestiños.**

22_ EJERCICIO 2 – Junio (modelo 1) 2022

Se considera las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ donde a es un número real.

a) (0'75 puntos) Halle lo valores del parámetro a para que la matriz A tenga inversa.
b) (0'75 puntos) Para a = 2, calcule la matriz inversa de A.
c) (1 punto) Para a = 2, resuelva la ecuación matricial $X\cdot A + I_3 = B^t \cdot C$.

Solución

Se considera las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ donde a es un número real.

(a)
Halle lo valores del parámetro a para que la matriz A tenga inversa.

Sabemos que existe A^{-1} si del determinante de A es distinto de cero.

$$\text{Como } |A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}_{F_3-F_2} = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & 4-a & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix}\text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{columna}\end{matrix} = -(1)(a\cdot(4-a) - 3) = a^2 - 4a + 3.$$

De $a^2 - 4a + 3 = 0 \rightarrow a = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2}$, tenemos a = 1 y a = 3.

Si $a \neq 1$ y $a \neq 3$, $|A| \neq 0$, y existe la matriz inversa A^{-1} $= \dfrac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$.

(b)
Para a = 2, calcule la matriz inversa de A.

Para a = 2, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $|A| = (2)^2 - 4(2) + 3 = -1$. $A^t=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t)=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$,

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A^t) = \frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -6 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

(c)
Para a = 2, resuelva la ecuación matricial $X\cdot A + I_3 = B^t \cdot C$.

Para a = 2 existe A^{-1}. De $X\cdot A + I_3 = B^t \cdot C \rightarrow X\cdot A = B^t \cdot C - I_3$, luego multiplicando la expresión $X\cdot A = B^t \cdot C - I_3$, por la derecha por A^{-1}, tenemos:
$X\cdot A\cdot A^{-1} = (B^t \cdot C - I_3)\cdot A^{-1} \rightarrow X\cdot I = (B^t \cdot C - I_3)\cdot A^{-1}$, de donde **$X = (B^t \cdot C - I_3)\cdot A^{-1}$.**

Tenemos $\mathbf{B^t \cdot C} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B^t \cdot C - I_3} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Luego $\mathbf{X = (B^t \cdot C - I_3,) \cdot A^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 & -21 & 19 \\ 16 & 12 & -11 \\ -6 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

BLOQUE B

22_ EJERCICIO 3 – Junio (modelo 1) 2022

a) (1'25 puntos) Se considera la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, con a, b y c números reales. Calcule los valores de a, b y c, sabiendo que la gráfica de f posee un extremo relativo en el punto de abscisa x = 3 y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto P(0, 18) es -3

b) (1'25 puntos) Calcule el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función $g(x)= x^3- 4x- 3x + 18$ y el eje de abscisas.

Solución

(a)

Se considera la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, con a, b y c números reales. Calcule los valores de a, b y c, sabiendo que la gráfica de f posee un extremo relativo en el punto de abscisa x = 3 y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto P(0, 18) es -3

Como f(x) tiene un extremo relativo en x = 3, sabemos que **f '(3) = 0**.
Como f(x) pasa por el punto P(0, 18), sabemos que **f(0) = 18**.
Como f(x) tiene un *pendiente* de su recta tangente en el punto P(0, 18), *-3*, sabemos que **f '(0) = -3**.

Tenemos: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$; $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$; $f''(x) = 6x + 2^a$.

De f(0) = 18 tenemos 18 = 0 + 0 + 0 + c, luego **c = 18.**
De f '(0) = -3 tenemos -3 = 0 + 0 + b, luego **b = - 3.**
De f '(3) = 0 tenemos $0 = 3\cdot(3)^2 + 2a\cdot(3) + (-3)$, luego **6a = -24 → a = -4.**

La función sería $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$.

(b)

Calcule el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función $g(x)= x^3- 4x^2 - 3x + 18$ y el eje de abscisas.

Vemos que x = 3 es una raíz de g(x), pues g(3) = 0. Aplicamos Ruffini

	1	-4	-3	18
3		3	-3	-18
	1	-1	-6	$\boxed{0}$

Por tanto $g(x) = (x - 3)\cdot(x^2- x – 6) = (x - 3)\cdot(x – 3)(x + 2)$, por tanto la gráfica de g(x) corta al eje de abscisas en x = -2 y x = 3.

$$\textbf{Área} = \int_{-2}^{3}(x^3 - 4x^2 - 3x + 18)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 18x\right]_{-2}^{3} =$$

$$= \mathbf{(3^4/4 - 4\cdot(3)^3/3 - 3(3)^2/2 + 18(3)) - (2^4/4 + 4\cdot(2)^3/3 - 3(2)^2/2 - 18(2))\ u^2 = 625/12\ u^2 \cong 50'08333\ u^2.}$$

22_ EJERCICIO 4 – Junio (modelo 1) 2022

a) (1'25 puntos) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 6x - 3 & x \le 1 \\ ax^2 + bx + 2 & x > 1 \end{cases}$ con a y b números reales. Determine a y b para que f sea continua y derivable en su dominio.

b) (1'25 puntos) Calcule el área del recinto acotado, limitado por el eje OX y la gráfica de la función g(x) = $= -2x^2 + 8x - 6$.

Solución

(a)

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 6x - 3 & x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 2 & x > 1 \end{cases}$ con a y b números reales. Determine a y b para que f sea continua y derivable en su dominio.

Como es derivable en todo R, es continua en todo R; en particular es continua y derivable en x = 1.

Como es continua en x = 1 tenemos: $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$.

Tenemos $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (6x - 3) = 6 - 3 = 3$. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(ax^2 + bx + 2\right) = a + b + 2$, por tanto igualando tenemos $a + b + 2 = 3$, de donde **a + b = 1**.

Como es derivable en x = 10 tenemos: $f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = f'(1^+)$. Vamos a ver la continuidad de la derivada.

$f(x) = \begin{cases} 6x - 3 & x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 2 & x > 1 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} 6 & x \leq 1 \\ 2ax + b & x > 1 \end{cases}$

Tenemos $f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} (6) = 6$ $f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} (2ax + b) = 2 + b$, por tanto igualando tenemos **2a + b = 6**, con lo cual **b = 6 – 2a → , es decir a + (6 - 2a) = 1 → a = 5 y b = -4, para que f sea derivable y continua**.

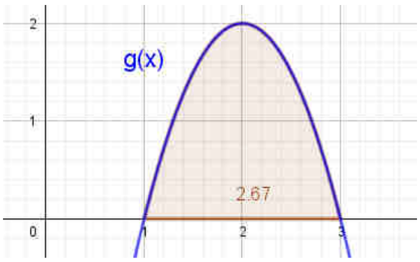
(b)

Calcule el área del recinto acotado, limitado por el eje OX y la gráfica de la función $g(x) = -2x^2 + 8x - 6$.

Sabemos que la gráfica de $g(x) = -2x^2 + 8x – 6$, es la de una parábola de la forma (∩), pues el número que multiplica a x^2 es negativo, con abscisa del vértice en la solución de $g'(x) = 0 = -4x + 8$, de donde x = 2 y el vértice es V(2, 2).

Corta al eje OX en las soluciones de $g(x) = 0 \to x^2 - 4x + 3 = 0 \to x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$, de donde x=1 y x = 3.

Un esbozo de la gráfica de g es:



Tenemos **Área =** $\int_1^3 (-2x^2 + 8x - 6)dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + 4x^2 - 6x\right]_1^3$ $\mathbf{= (-2\cdot 3^3/3 + 4\cdot 3^2 - 6\cdot 3) - (2\cdot 1^3/3 + 4\cdot 1^2 - 6\cdot 1)\ u^2 =}$

$\mathbf{= 8/3\ u^2 \cong 2'6667\ u^2}$.

BLOQUE C

22_ EJERCICIO 5 – Junio (modelo 1) 2022

En un estudio realizado en una sucursal bancaria se ha determinado que el 70% de los créditos concedidos son hipotecarios y el 25% de los créditos superan los 200000€. El 20% de los créditos son hipotecarios y de más de 200000€. Se elige al azar un cliente al que le han concedido un crédito. Calcule la probabilidad de que:

a) (1 punto) El crédito no sea hipotecario y no supere los 200000€.

b) (0'75 puntos) Si su crédito no es hipotecario, este no supere los 200000€.

c) (0'75 puntos) Si su crédito supera los 200000€, que este no es hipotecario.

Solución

En un estudio realizado en una sucursal bancaria se ha determinado que el 70% de los créditos concedidos son hipotecarios y el 25% de los créditos superan los 200000€. El 20% de los créditos son hipotecarios y de más de 200000€. Se elige al azar un cliente al que le han concedido un crédito. Calcule la probabilidad de que:

(a)

El crédito no sea hipotecario y no supere los 200000€.

Llamemos A y B, a los sucesos, “crédito hipotecario” y "el crédito supera los 200000€, respectivamente.

Datos del problema: $p(A) = 70\% = 0'7$; $p(B) = 25\% = 0'25$; $p(A\cap B) = 20\% = 0'2$, ...

Me piden **p(El crédito no sea hipotecario y no supere los 200000€) = p(noA y noB) =**
= $p(A^C\cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = **1 - p(A∪B) =** {++} **= 1 - 0’75 = 0’25**.

{++} $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) = 0'7 + 0'25 - 0'2 = 0'75$.
(b)
Si su crédito no es hipotecario, este no supere los 200000€.

Me piden **p(Si su crédito no es hipotecario, este no supere los 200000€) = p(noB / noA) =**
= $\mathbf{p(B^C/A^C)}$ = $p(A^C\cap B^C)/p(A^C)$ **= (0’25)/(1 - 0’7) = 5/6 ≅ 0’8333,**
(c)
Si su crédito supera los 200000€, que este no es hipotecario.

Me piden **p(Si su crédito supera, que no sea hipotecario) = p(noA / B) =** $\mathbf{p(A^C/B)}$ =
= $p(A^C\cap B)/p(B) = [p(B) - p(A\cap B)]/p(B)$ **= (0’25 - 0’2)/(0’25) = 1/5 = 0’2.**

22_ EJERCICIO 6 – Junio (modelo 1) 2022
En su tiempo libre, el 65% de los estudiantes de un centro educativo juega con videojuegos, el 45% lee libros y el 15% no hace ninguna de las dos cosas. Elegido al azar un estudiante de dicho centro, calcule la probabilidad de que:
a) (1 puntos) Juegue con videojuegos o lea libros.
b) (0’75 puntos) Juegue con videojuegos y no lea libros.
c) (0’75 puntos) Lea libros sabiendo que no juega con videojuegos.

Solución

En su tiempo libre, el 65% de los estudiantes de un centro educativo juega con videojuegos, el 45% lee libros y el 15% no hace ninguna de las dos cosas. Elegido al azar un estudiante de dicho centro, calcule la probabilidad de que:
(a)
Juegue con videojuegos o lea libros.

Sean los sucesos A = ”jugar con videojuegos” y B = “leer libros”.

Nos dan $p(A) = 65\% = 0'65$, $p(B) = 45\% = 0'45$, p(no hace ninguna de las dos cosas) = **p(noA y noB) =**
= $p(A^C\cap B^C) = 15\% = 0'15$

De $0'15 = p(A^C\cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = $1 - p(A\cup B)$, por tanto resulta que
p(A∪B) = 1 - 0’15 = 0’85.

Me piden **p(juegue con video juegos o lea libros) = p(A o B) = p(A∪B)** = 0’85.
(b)
Juegue con videojuegos y no lea libros.

Me piden **p(juegue con video juegos y no lea libros) =** $\mathbf{p(A \text{ y } B^C) = p(A\cap B^C)}$ =
= $p(A) - p(A\cap B)$ = {++} **= 0’65 - 0’25 = 79/100 = 0’4.**

{++} $p(A\cap B) = p(A) + p(B) – p(A\cup B) = 0'65 + 0'45 – 0'85 = 0'25$
(c)
Lea libros sabiendo que no juega con videojuegos.

Me están pidiendo **p(lea libros sabiendo que no juega con videojuegos) =** $\mathbf{p(B/A^C)}$ **=**
= $\mathbf{[(p(B\cap A^C)]/p(A^C)}$ = $[p(B) - p(A\cap B)]/(1 – p(A))$ **= (045 - 0’25)/(1 - 0’65) = 4/7 ≅ 0’571428.**

BLOQUE D

22_ EJERCICIO 7 – Junio (modelo 1) 2022
La resistencia media de la ruptura de una nueva gama de herramientas sigue un distribución Normal de desviación típica 15MPa (megapascales). Se seleccionan al azar 100 herramientas forjadas en la misma

máquina durante el mismo proceso de producción, obteniéndose una resistencia media de 800MPa.
a) (1’5 puntos) Realizando la estimación con un nivel de confianza del 92%, ¿entre que valores se estima la resistencia media poblacional de esta gama de herramientas?
b) (1’5 puntos) Manteniendo el mismo nivel de confianza del 92%, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error máximo en la estimación de la resistencia media a la ruptura sea menor que 2MPa?

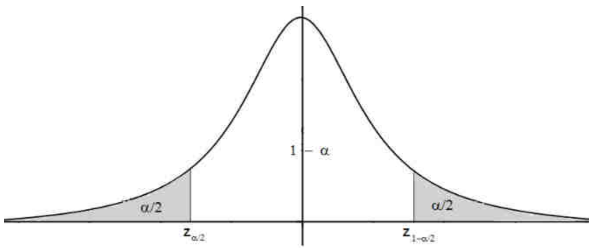
Solución

La resistencia media de la ruptura de una nueva gama de herramientas sigue un distribución Normal de desviación típica 15MPa (megapascales). Se seleccionan al azar 100 herramientas forjadas en la misma máquina durante el mismo proceso de producción, obteniéndose una resistencia media de 800MPa.

(a)

Realizando la estimación con un nivel de confianza del 92%, ¿entre que valores se estima la resistencia media poblacional de esta gama de herramientas?

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *son los puntos críticos* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el error máximo de la estimación es $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= (b - a)/2, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es* $n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$.

Sea X una variable aleatoria que sigue una ley Normal de media poblacional desconocida y desviación típica 15.

Datos del problema: n = 100, media muestral $\overline{x} = 800$; $\sigma = 15$; nivel de confianza = 92% = 0’92 = 1 - α, de donde α = 0’08, con la cual $\alpha/2$ = (0’08)/2 = 0’04.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'04 = 0'96$, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0’96 no viene, y la más próxima es 0’9599 y corresponde a 1’75, luego $z_{1-\alpha/2}$ = 1’75 (*si interpoláramos entre 0’9599 y 0’9608 tendríamos* $z_{1-\alpha/2}$ *= 1’751*), por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\mathbf{I.C.(\mu)} = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(800 - 1'75\cdot\frac{25}{\sqrt{100}}, 800 + 1'75\cdot\frac{25}{\sqrt{100}}\right) = \mathbf{(795'625, 804'375).}$$

Luego los valores en que se estima la resistencia media poblacional de esta gama de herramientas son 795’625MPa y 804’375MPa.

(b)

Manteniendo el mismo nivel de confianza del 92%, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error máximo en la estimación de la resistencia media a la ruptura sea menor que 2MPa?

Datos del problema: $\sigma = 25$; error = E < 2; punto crítico $z_{1-\alpha/2}$ = 1’75.

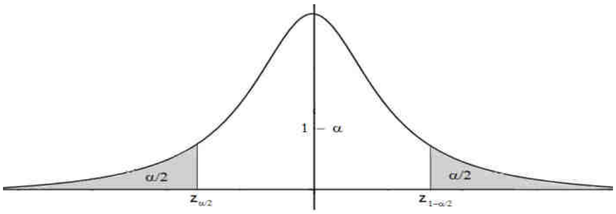
De el error $E \le z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2$, tenemos $n \ge \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'75\cdot 25}{2}\right)^2 \cong 478'51$, tenemos que **el tamaño mínimo de la muestra a elegir es de n = 479.**

22_ EJERCICIO 8 – Junio (modelo 1) 2022
Se quiere estudiar la proporción de perros que están vacunados en Andalucía. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 400 perros de los que 320 resultan vacunados.
a) (1'5 puntos) Obtenga un intervalo con un nivel de confianza al 92% para estimar la proporción de perros vacunados en Andalucía y calcule el error máximo cometido.
b) (1 punto) En una nueva muestra, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, ¿cuántos perros, como mínimo, hay que elegir para que el error sea menor que 0'02?

Solución

Se quiere estudiar la proporción de perros que están vacunados en Andalucía. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 400 perros de los que 320 resultan vacunados.
(a)
Obtenga un intervalo con un nivel de confianza al 92% para estimar la proporción de perros vacunados en Andalucía y calcule el error máximo cometido.

Sabemos que para la proporción poblacional **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$, sigue una $N\left(\hat{p},\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$, y generalmente escribimos $\hat{p} \approx N\left(\hat{p},\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$ o $\hat{p} \to N\left(\hat{p},\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción es:

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$
También sabemos que en la proporción es $\hat{p} = (a + b)/2$, el error máximo de la estimación es E =
$= z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, para el intervalo de la proporción. Pero la amplitud del intervalo es $b - a = 2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} =$
$= 2\cdot E$, de donde $E = (b – a)/2$, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} =$
$= \frac{2\cdot(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{(b-a)^2}$.

Datos del problema: $n = 400$, $\hat{p} = \frac{320}{400} = 0'8$, $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0'8 = 0'2$, nivel de confianza = 92% = 0'92 y hemos visto en el problema anterior que el punto crítico es, luego $z_{1-\alpha/2} = 1'75$ (*si interpoláramos entre 0'9599 y 0'9608 tendríamos $z_{1-\alpha/2} = 1'751$*), por tanto **el intervalo de confianza pedido es**:
, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\mathbf{I.C.(p)} = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(0'8 - 1'75\cdot\sqrt{\frac{0'8\cdot 0'2}{400}}; 0'8 + 1'75\cdot\sqrt{\frac{0'8\cdot 0'2}{400}}\right) =$$

= (0'765; 0'835)

(b)
En una nueva muestra, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, ¿cuántos perros, como mínimo, hay que elegir para que el error sea menor que 0'02?

Datos del problema: $\hat{p} = 0'8$, $\hat{q} = 0'2$, error = $E \le 2\% = 0'02$, nivel de confianza = el mismo 92%, por tanto $z_{1-\alpha/2} = 1'75$.
De $E \le z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, tenemos $n \ge \frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} = \frac{(1'75)^2\cdot 0'8\cdot 0'2}{(0'02)^2} = 1225$, por tanto **el tamaño mínimo de perros que sería preciso seleccionar es de n = 1225.**