BLOQUE A

22_ EJERCICIO 1 – Julio 2022

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) (1’5 puntos) Determine la matriz X que verifica $A\cdot X + B = A^2\cdot C$.
b) (1 punto) Determine las dimensiones de dos matrices P y Q sabiendo que $A\cdot P^t + C = C\cdot(Q\cdot B)$.

Solución

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

(a)
Determine la matriz X que verifica $A\cdot X + B = A^2\cdot C$.

Si del determinante de A es distinto de cero $|A| \neq 0$, sabemos que existe $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$.

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}_{F_3+F_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos segunda columna $= -(1)(-2 - 1) = 3 \neq 0$., existe A^{-1}.

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj(A^t) = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -2/3 & -1/3 & -5/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.

De $A\cdot X + B = A^2\cdot C$, tenemos $A\cdot X = A^2\cdot C - B$; multiplicando dicha por la izquierda por A^{-1}, tenemos:
$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot(A^2\cdot C - B) \rightarrow I_3\cdot X = A^{-1}\cdot(A^2\cdot C - B)$, de donde $\mathbf{X = A^{-1}\cdot(A^2\cdot C - B)}$.

$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2\cdot C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 11 & -16 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A^2\cdot C - B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 11 & -16 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -17 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Luego $\mathbf{X = A^{-1}\cdot(A^2\cdot C - B)} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -17 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -7 & 19 \\ -13 & 10 \\ 10 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 & 19/3 \\ -13/3 & 10/3 \\ 10/3 & -13/3 \end{pmatrix}$.

b)
Determine las dimensiones de dos matrices P y Q sabiendo que $A\cdot P^t + C = C\cdot(Q\cdot B)$.

Recuerdo que para multiplicar matrices el número de columnas de la primera debe coincidir con el número de filas de la segunda y que el resultado tiene filas de la primera y columnas de la segunda; y que para sumar o restar matrices deben tener el mismo orden.

$A_{3x3}\cdot P^t_{3x2} + C_{3x2} = C_{3x2}\cdot(Q_{2x3}\cdot B_{3x2})$.

Luego la matriz P tiene de orden 2x3 (su transpuesta es 3x2) y la matriz Q tiene de orden 2x3.

22_ EJERCICIO 2 – Julio 2022

Se considera el recinto limitado por las siguientes inecuaciones: $y - 2x \leq 7$; $-x + 3y \leq 21$; $x + 2y \leq 19$; $x + y \leq 14$.
a) (1’4 puntos) Represente el recinto y determine sus vértices.
b) (0’6 puntos) Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x, y) = x + 4y$ en el recinto anterior, así como los puntos donde se alcanza.
c) (0’5 puntos) ¿Podría tomar la función objetivo F el valor de 40 en algún punto de la región factible? ¿Y el valor 20? Justifique las respuestas.

Solución

Se considera el recinto limitado por las siguientes inecuaciones: $y - 2x \leq 7$; $-x + 3y \leq 21$; $x + 2y \leq 19$; $x + y \leq 14$.
(a)
Represente el recinto y determine sus vértices.

Inecuaciones: $y - 2x \leq 7$; $-x + 3y \leq 21$; $x + 2y \leq 19$; $x + y \leq 14$.

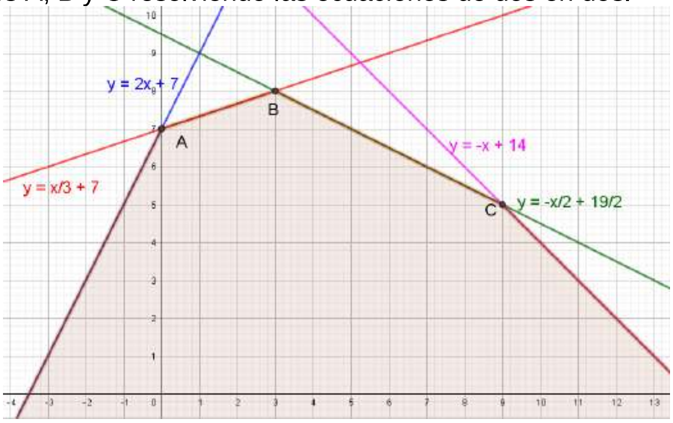
Las desigualdades: $y - 2x \leq 7$; $-x + 3y \leq 21$; $x + 2y \leq 19$; $x + y \leq 14$, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, $y - 2x = 7$; $-x + 3y = 21$; $x + 2y = 19$; $x + y = 14$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$y = 2x + 7$ ($\leq$); $y = x/3 + 7$ ($\leq$); $y = -x/2 + 19/2$ ($\leq$); $y = -x + 14$ ($\leq$).

Representamos gráficamente el **recinto abierto convexo** limitado por las desigualdades, y observamos que los vértices de dicho recinto son el A, B y C.

Calculamos dichos vértices A, B y C resolviendo las ecuaciones de dos en dos.



De $y = x/3 + 7$ e $y = 2x + 7$, tenemos $x/3 + 7 = 2x + 7 \rightarrow x + 21 = 6x + 21 \rightarrow 0 = 5x$, con lo cual $x = 0$ e $y = 7$, y el vértice es A(0, 7).

De $y = x/3 + 7$ e $y = -x/2 + 19/2$, tenemos $x/3 + 7 = -x/2 + 19/2 \rightarrow 2x + 42 = -3x + 57 \rightarrow 5x = 15$, con lo cual $x = 3$ e $y = (3)/3 + 7 = 8$, y el vértice es B(3, 8).

De $y = -x/2 + 19/2$ e $y = -x + 14$, tenemos $-x/2 + 19/2 = -x + 14 \rightarrow -x + 19 = -2x + 28 \rightarrow x = 9$, con lo cual $y = -(9) + 14 = 5$, y el vértice es C(9, 5).

(b)

Calcule los valores máximo y mínimo de la función **F(x, y) = x + 4y** en el recinto anterior, así como los puntos donde se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa delimitada por las restricciones, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos *F* en los puntos anteriores A(0, 7), B(3, 8) y C(9, 5). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F_A(0, 7) = (0) + 4(7) **= 28**; **F_B(3, 8)** = (3) + 4(8) **= 35**; F_C(9, 5) = (9) + 4(5) = 29.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 35** (el mayor valor en los vértices) **como la región convexa es abierta no tiene valor mínimo.**

(c)

¿Podría tomar la función objetivo F el valor de 40 en algún punto de la región factible? ¿Y el valor 20? Justifique las respuestas.

Cómo 40, súpera al máximo absoluto 35, el valor 40 no está en la región factible hallada.
El valor de 20 lo puede tomar puesto que no tiene mínimo.

BLOQUE B

22_ EJERCICIO 3 – Julio 2022

a) (1 punto) Se considera la función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx – 1$ donde b y c son números reales. Determine el valor de b y c para que la función f presente un extremos relativo en el punto de abscisa $x = 1/3$ y además la gráfica de la función f pase por el punto (-2, -3).

b) (1'5 puntos) Dada la función $g(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$, realice el esbozo de su gráfica estudiando los puntos de corte con los ejes coordenados y su monotonía. Determine el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función g y el eje de abscisas.

Solución

(a)

Se considera la función f(x) = $x^3 + bx^2 + cx - 1$ donde b y c son números reales. Determine el valor de b y c para que la función f presente un extremos relativo en el punto de abscisa x = 1/3 y además la gráfica de la función f pase por el punto (-2, -3).

Como f presenta un extremo relativo en x = 1/3, tenemos **f '(1/3) = 0.**
Como f pasa por el punto (-2, -3), tenemos **f (-2) = -3.**

Tenemos: f(x) = $x^3 + bx^2 + cx - 1$; f '(x) = $3x^2 + 2bx + c$.

De f '(1/3) = 0 tenemos $0 = 3(1/3)^2 + 2b(1/3) + c \rightarrow 0 = 1/3 + (2/3)\cdot b + c$, de donde 2b + 3c + 1 = 0.
De f(-2) = -3 tenemos $-3 = (-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) - 1 \rightarrow -3 = -8 + 4b - 2c - 1$, de donde 4b - 2c – 6 = 0 .

$$\begin{cases} 2b + 3c + 1 = 0 \\ 4b - 2c - 6 = 0 \;\; (E_2 - 2\cdot E_1) \end{cases} \approx \begin{cases} 2b + 3c + 1 = 0 \\ -8c - 8 = 0 \end{cases}$$, de donde **c = -1** y de 2b + 3(-1) + 1 = 0, resulta **b = 1.**

(b)

Dada la función g(x) = $-x^3 - x^2 + x + 1$, realice el esbozo de su gráfica estudiando los puntos de corte con los ejes coordenados y su monotonía. Determine el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función g y el eje de abscisas.

Tenemos f(x) = $-x^3 - x^2 + x + 1$; f '(x) = $-3x^2 - 2x + 1$.

De f '(x) = 0 $\rightarrow$ $-3x^2 - 2x + 1 = 0$ $\rightarrow$ $3x^2 + 2x - 1 = 0$ $\rightarrow$ $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} = \dfrac{-2 \pm 4}{6}$, de donde

x = 2/6 = 1/3 $\cong$ 0'333 y x = -6/6 = -1, que serán los posibles extremos relativos.

Como f '(-2) = $-3(-2)^2 - 2(-2) + 1 = -7 < 0$, **f es estrictamente decreciente** (□) **en (-∞, -1).**

Como f '(0) = $-3(0)^2 - 2(0) + 1 = 1 > 0$, **f es estrictamente creciente** (□) **en (-1, 1/3)**.

Como f '(1) = $-3(1)^2 - 2(1) + 1 = -4 < 0$, **f es estrictamente creciente** (□) **en (1/3, +∞).**

Por definición **x = -1 es un mínimo relativo y vale f(-1) =** $-(-1)^3 - (-1)^2 + (-1) + 1$ **= 0.**
Por definición **x = 1/3 es un máximo relativo y vale f(2) =** $-(1/3)^3 - (1/3)^2 + (1/3) + 1$ **= 32/27 ≅ 1'185.**

Para terminar de esbozar la gráfica veamos el comportamiento en ±∞ y el corte con los ejes.

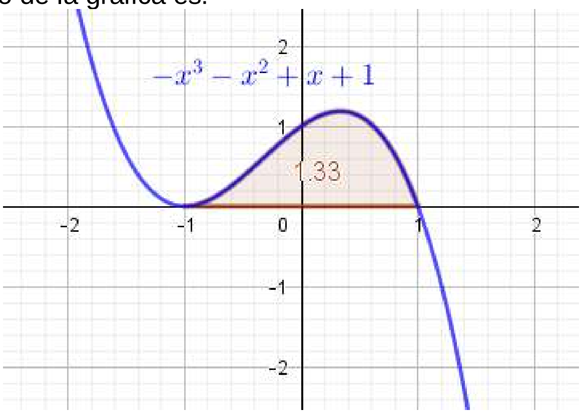
Tenemos $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x^3 - x^2 + x + 1) = \lim_{x\to-\infty} (-x^3) = -(-\infty)^3 = +\infty$. , luego en -∞ la función está en +∞.

Tenemos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-x^3 - x^2 + x + 1) = \lim_{x\to+\infty} (-x^3) = -(+\infty)^3 = -\infty$. , luego en +∞ la función está en -∞.

Para x = 0 $\rightarrow$ f(0) = 1. Punto (0, 1)

Para f(x) = 0, cómo f(1) = 0 y f(-1) = 0 (vemos que f '(-1) = 0), de donde x = 1 y x = -1 (doble) y los puntos de corte con los ejes son el ya visto (-1, 0) y (1, 0).

Con todo lo anterior un esbozo de la gráfica es:



Determine el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función g y el eje de abscisas.

Área = $\int_{-1}^{1} (-x^3 - x^2 + x + 1)dx = \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^{1} =$

= [**(- (1)^4/4 - (1)^3/3 + (1)^2/2 + (1)) - (- (-1)^4/4 - (-1)^3/3 + (-1)^2/2 + (-1))] u2 = 4/3 u2 ≅ 1'3333 u^2.**

22_ EJERCICIO 4 – Julio 2022

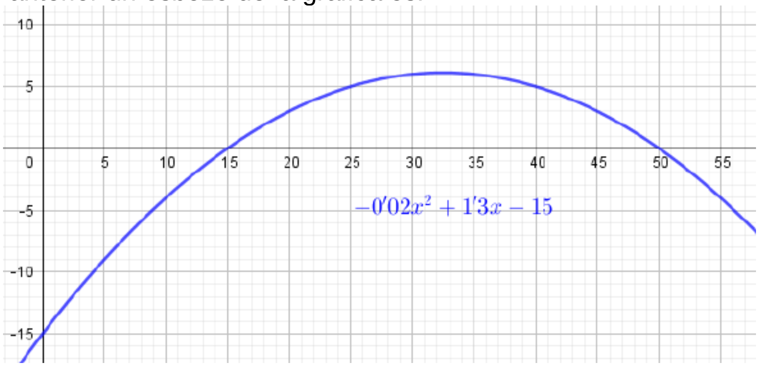
El beneficio, en miles de euros, que se obtiene en una pequeña finca familiar por la venta de aceitunas, en miles de kilogramos, viene dado por la siguiente función: $B(x) = -0'02x^2 + 1'3x - 15,\ x \geq 0$.
a) (0'75 puntos) Represente la función beneficio y calcule los puntos de corte con el eje OX.
b) (0'5 puntos) ¿Para qué valores de x la finca no tiene perdidas?
c) (0'5 puntos) ¿Para qué número de kilogramos el beneficio será máximo? ¿Cuánto vale dicho beneficio?
d) (0'75 puntos) ¿Cuántos kilogramos debe vender para obtener un beneficio de 5000€?

Solución

El beneficio, en miles de euros, que se obtiene en una pequeña finca familiar por la venta de aceitunas, en miles de kilogramos, viene dado por la siguiente función: $B(x) = -0'02x^2 + 1'3x - 15,\ x \geq 0$.
(a)
Represente la función beneficio y calcule los puntos de corte con el eje OX.

La gráfica de $B(x) = -0'02x^2 + 1'3x - 15$ es la de una parábola así (∩) porque el número que multiplica a x^2 es negativo. Con abscisa del vértice en la solución de B '(x) = 0 = -0'04x + 1'3, de donde x = 1'3/0'04 =
= 65/2 = 32'5 y V(32'5, B(32'5)) = V(32'5, 49/8) = V(32'5, 6'125).
Cortes con los ejes:
Si x = 0, punto (0, -15).

Si $B(x) = 0 = -0'02x^2 + 1'3x - 15 = 0 = 0'02x^2 - 1'3x + 15 \rightarrow$ $x = \dfrac{1'3 \pm \sqrt{1'69 - 1'2}}{0'04} = \dfrac{1'3 \pm 0'7}{0'04}$, de donde x = 15 y x = 50, es decir los puntos (1, 0) y (5, 0).
Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica es:



(b)
¿Para qué valores de x la finca no tiene perdidas?

La finca no tiene pérdidas para B(x) ≥ 0, es decir para 15 ≤ x ≤ 50 (15000 y 50000 kilos de aceitunas).

(c)
¿Para qué número de kilogramos el beneficio será máximo? ¿Cuánto vale dicho beneficio?

El máximo es el vértice de la parábola es decir el punto V(32'5, 6'125), luego hay un beneficio de 6125 euros vendiendo 32500 kilos de aceitunas.
(d)
¿Cuántos kilogramos debe vender para obtener un beneficio de 5000€?

Tenemos que resolver la ecuación B(x) = 5 (se mide en miles de euros, luego 5000€ equivale a 5)

De $B(x) = 5 \rightarrow -0'02x^2 + 1'3x - 15 = 5 \rightarrow -0'02x^2 + 1'3x - 20 = 0 \rightarrow 0'02x^2 - 1'3x + 20 = 0 \rightarrow$
$x = \dfrac{1'3 \pm \sqrt{1'69 - 1'6}}{0'04} = \dfrac{1'3 \pm 0'3}{0'04}$, de donde x = 25 y x = 40, es decir **hay que vender 25000 o 40000 kilogramos de aceitunas.**

BLOQUE C

22_ EJERCICIO 5 – Julio 2022

En una determinada región hay tres universidades A, B y C. De los estudiantes que terminaron sus estudios el año pasado, el 60% procedían de la universidad A, el 30% de la B y el resto de la C. Además, se conoce que la probabilidad de que un estudiante de la universidad A no encuentre trabajo en su región es 0’4 y para un estudiante de B es 0’5

a) (1’5 puntos) Si la probabilidad de que un estudiante no encuentre trabajo en su región es 0’395, determine la probabilidad de que un estudiante de la universidad C encuentre trabajo en su región.

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un estudiante no haya encontrado trabajo en su región proceda de la universidad A o de la B.

Solución

En una determinada región hay tres universidades A, B y C. De los estudiantes que terminaron sus estudios el año pasado, el 60% procedían de la universidad A, el 30% de la B y el resto de la C. Además, se conoce que la probabilidad de que un estudiante de la universidad A no encuentre trabajo en su región es 0’4 y para un estudiante de B es 0’5

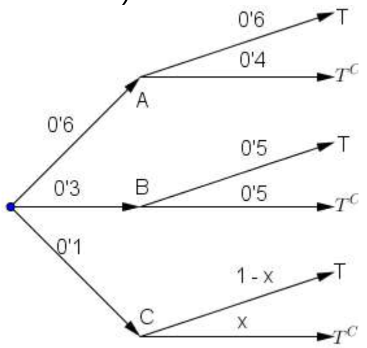
(a)

Si la probabilidad de que un estudiante no encuentre trabajo en su región es 0’395, determine la probabilidad de que un estudiante de la universidad C encuentre trabajo en su región.

Llamemos A, B, C, T y T^C, a los sucesos siguientes, “universidad A”, “universidad B”, “universidad C”, "encontrar trabajo” y “no encontrar trabajo.

Datos del problema: p(A) = 60% = 0’6; p(B) = 30% = 0’3; $p(T^C/A)$ = 0’4; $p(T^C/B)$ = 0’5, $p(T^C)$ = 0’395, …

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Me piden **p(un estudiante de la universidad C encuentre trabajo en su región) = p(T/C) = 1 - x.**

Por el teorema de la Probabilidad Total:

Tenemos $\mathbf{p(T^C)}$ = 0’395 = $p(A)\cdot p(T^C/A) + p(B)\cdot p(T^C/B) + p(C)\cdot p(T^C/C)$ =
= (0’6)·(0’4) + (0’3)·(0’5) + (0’1)·(x) **= 0’39 + 0’1x, de donde x = (0’395 - 0’39)/0’1 = 0’05**.

Luego la probabilidad de que un estudiante de la universidad C encuentre trabajo en su región es 1 - x = 1 - 0’05 = 0’95.

(b)

Solución de D. Juan Antonio Martínez García (www.ebaumatematicas.com)

Calcule la probabilidad de que un estudiante no haya encontrado trabajo en su región proceda de la universidad A o de la B.

Me piden **p(proceda de la universidad A o B, si no ha encentrado trabajo) = $\mathbf{P(A\cup B/T^C)}$**

Por la fórmula de Bayes:

Me piden $\mathbf{p(P(A\cup B/T^C)} =$ $\dfrac{p((A\cup B)\cap T^C)}{p(T^C)} = \dfrac{p(A)\cdot p(T^C/A) + p(B)\cdot p(T^C/B)}{p(T^C)} =$

$= \dfrac{(0'6)\cdot(0'4) + (0'3)\cdot(0'5)}{0'395} =$ ((0’1)·(1))/(1 - 0’825) **= 78/79 ≅ 0’98734177.**

22_ EJERCICIO 6 – Julio 2022

Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral tales que: $p(A\cup B) = 3/7$, $p(A^C) = 5/7$, $p(B^C) = 2/3$.

a) (1 punto) ¿Son A y B independientes? ¿Son A y B incompatibles?

b) (0’75 puntos) Calcule $p(A^C \cap B^C)$.
c) (1 punto) Calcule $p(B/A^C)$.

Solución

Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral tales que: $p(A \cup B) = 3/7$, $p(A^C) = 5/7$, $p(B^C) = 2/3$.
(a)
¿Son A y B independientes? ¿Son A y B incompatibles?

Sabemos que A y B independientes si $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

Nos dan p $p(A \cup B) = 3/7$, $p(A^C) = 5/7$ (de donde $p(A) = 1 - p(A^C) = 1 - 5/7 = 2/7$), $p(B^C) = 2/3$ (de donde $p(B) = $
$= 1 - p(B^C) = 1 - 2/3 = 1/3$).

De $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ tenemos $3/7 = 2/7 + 1/3 - p(A \cap B)$, luego $p(A \cap B) = 2/7 + 1/3 - 3/7 = 4/21$.

Como $p(A \cap B) = 4/21 \neq$ $(2/7) \cdot (1/3) = 2$**$/21 = p(A) \cdot p(B)$, los sucesos no son independientes.**

Sabemos que A y B incompatibles si $p(A \cap B) = 0$, cómo **$p(A \cap B) = 4/21 \neq 0$, los sucesos no son incompatibles.**
(b)
Calcule $p(A^C \cap B^C)$.

$p(A^C \cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A \cup B)^C$ = {suceso contrario} = $1 - p(A \cup B)$ **$= 1 - 3/7 = 4/7$.**
(c)
Calcule $p(B/A^C)$.

$p(B/A^C) = [p(B \cap A^C)]/p(A^C)$ $= [p(B) - p(A \cap B)]/p(A^C) = (1/3 - 4/21)/(5/7)$ **$= 1/5 = 0’2$.**

BLOQUE D

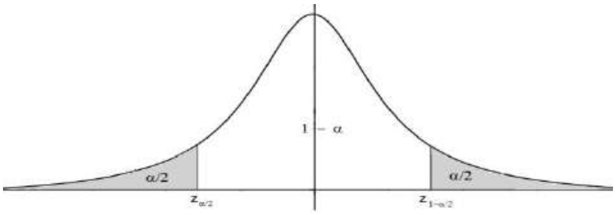
22_ EJERCICIO 7 – Julio 2022

Una fábrica de tornillos quiere hacer un estudio sobre la proporción de tornillos que cumplen las especificaciones del fabricante. Para ello ha seleccionado una muestra de 1500 tornillos, resultando que 1425 cumplen las especificaciones del fabricante.
a) (1‘5 puntos) Determine un intervalo de confianza para la proporción de tornillos que cumplen las especificaciones del fabricante con un nivel de confianza del 97%.
b) (1 punto) Manteniendo la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza anterior, ¿cuál tendría que ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1.

Solución

Una fábrica de tornillos quiere hacer un estudio sobre la proporción de tornillos que cumplen las especificaciones del fabricante. Para elle ha seleccionado una muestra de 1500 tornillos, resultando que 1425 cumplen las especificaciones del fabricante.

Sabemos que para la proporción poblacional **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$, sigue una $N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$, y generalmente escribimos $\hat{p} \approx N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$ o $\hat{p} \to N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción es:

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que en la proporción es $\hat{p} = (a + b)/2$, el error máximo de la estimación es E =

$= z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, para el intervalo de la proporción. Pero la amplitud del intervalo es b -a = $2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ =

= 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es n = $\frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} =$

$= \frac{2\cdot(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{(b-a)^2}$.

(a)
Determine un intervalo de confianza para la proporción de tornillos que cumplen las especificaciones del fabricante con un nivel de confianza del 97%.

Datos del problema: n = 1500, $\hat{p} = \frac{1425}{1500}$ = 0'95, $\hat{q}$ = 1 - $\hat{p}$ = 1 - 0'95 = 0'05, nivel de confianza = 97% =
= 0'97 = 1 - α, de donde α = 0'03, con la cual α/2 = (0'03)/2 = 0'015.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'015 = 0'985, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'985 si viene, y corresponde al punto crítico $z_{1-\alpha/2}$ = 2'17. Por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\textbf{I.C.(p)} = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(0'95 - 2'17\cdot\sqrt{\frac{0'95\cdot 0'05}{1500}},\ 0'95 + 2'17\cdot\sqrt{\frac{0'95\cdot 0'05}{1500}}\right) \cong$$

≅ (0'9377887279; 0'9622112721)

(b)
Manteniendo la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza anterior, ¿cuál tendría que ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1%.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 0'95, $\hat{q}$ = 0'05, error = E ≤ 0'01, nivel de confianza, el mismo 97%, por tanto $z_{1-\alpha/2}$ =
= 2'17.

De $E \le z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, tenemos $n \ge \frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} = \frac{(2'17)^2\cdot 0'95\cdot 0'05}{(0'01)^2}$ = 2236'7275, por tanto **el tamaño mínimo de tornillos que sería preciso seleccionar es de n = 2237 tornillos.**

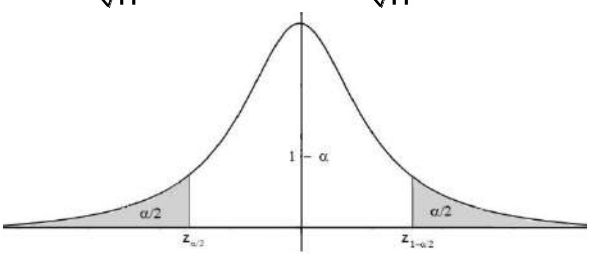
22_ EJERCICIO 8 – Julio 2022

El número de días que los titulados en un cierto master tardan en encontrar su primer trabajo sigue una distribución Normal de media μ desconocida y desviación típica 3 días.
a) (1 punto) Se elige una muestra aleatoria de 100 titulados obteniéndose una media muestral de 8'1 días. Calcule un intervalo de confianza al 97% para estimar la media poblacional.
b) (1 punto) Con un nivel de confianza del 92%, calcule el tamaño muestral mínimo necesario para que el error cometido, al estimar el número medio de días que estos titulados tardan en encontrar trabajo, sea inferior a un día.
c) (1 punto) Suponiendo que μ = 7'61 días y tomando muestras aleatorias de 36 titulados ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria media muestral? ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea superior a 8 días?

Solución

El número de días que los titulados en un cierto master tardan en encontrar su primer trabajo sigue una distribución Normal de media μ desconocida y desviación típica 3 días.

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\bar{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\bar{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\bar{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

I.C. (μ) = $\left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ = (a,b)

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *son los puntos críticos* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el error máximo de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= (b - a)/2, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$.

(a)

Se elige una muestra aleatoria de 100 titulados obteniéndose una media muestral de 8'1 días. Calcule un intervalo de confianza al 97% para estimar la media poblacional.

Datos del problema: $\sigma = 3$; n = 100; media muestral $\bar{x}$ = 8'1; nivel de confianza = 97% = 0'97 = 1 - α, de donde α = 0'03, con la cual $\alpha/2$ = (0'03)/2 = 0'015.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'015 = 0'985, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'985 si viene, y corresponde al punto crítico $z_{1-\alpha/2}$ = 2'17, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\textbf{I.C.}(\mu) = \left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(8'1 - 2'17\cdot\frac{3}{\sqrt{100}},\ 8'1 + 2'17\cdot\frac{3}{\sqrt{100}}\right) = \mathbf{(7'449,\ 8'751).}$$

(b)

Con un nivel de confianza del 92%, calcule el tamaño muestral mínimo necesario para que el error cometido, al estimar el número medio de días que estos titulados tardan en encontrar trabajo, sea inferior a un día.

Datos del problema: $\sigma = 3$; error = E < 1; nivel de confianza 92% = 0'92 = 1 - α, de donde α = 0'08, con la cual $\alpha/2$ = (0'08)/2 = 0'04.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'04 = 0'96, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'96 no viene, y la más próxima es 0'9599 y corresponde a 1'75, luego $z_{1-\alpha/2}$ = 1'75 (*si interpoláramos entre 0'9599 y 0'9608 tendríamos $z_{1-\alpha/2}$ = 1'751*), .

Del error E $\le z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 1, tenemos n $\ge \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'75\cdot 3}{1}\right)^2 \cong$ 27'56, tenemos que **el tamaño mínimo de la muestra a elegir es de n = 28.**

(c)

Suponiendo que μ = 7'61 días y tomando muestras aleatorias de 36 titulados ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria media muestral? ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea superior a 8 días?

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), en nuestro caso la variable aleatoria media muestral $\overline{X}$ sigue la normal N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) = N(7'61, 3/√(36)) =

= N(7'61, 0'5).

Me piden **p(la media muestral sea superior a 8 días) = p(** $\overline{X} \ge 8$**) =** {Tipificamos} = $p\left(Z \ge \frac{8 - 7'61}{0'5}\right)$ =

= p(Z ≥ 0'78) = {suceso contrario} = 1 - p(Z ≤ 0'78) = **1 - 0'7823 = 0'2177.**