**22_Mod_6_EJERCICIO 1_ BLOQUE A**

Se considera el recinto definido por las siguientes inecuaciones: $x + 2y \geq 7$; $2x - y \leq 4$; $4x - y \geq 1$; $3x + 2y \leq 20$.

a) (2 puntos) Represente dicho recinto y calcule sus vértices.

b) (0.5 puntos) Obtenga el valor máximo de la función $F(x, y) = x + 3y$ en el recinto anterior, así como el punto donde se alcanza.

**Solución**

Se considera el recinto definido por las siguientes inecuaciones: $x + 2y \geq 7$; $2x - y \leq 4$; $4x - y \geq 1$; $3x + 2y \leq 20$.

(a)

Represente dicho recinto y calcule sus vértices.

Función a maximizar es $F(x, y) = x + 3y$.

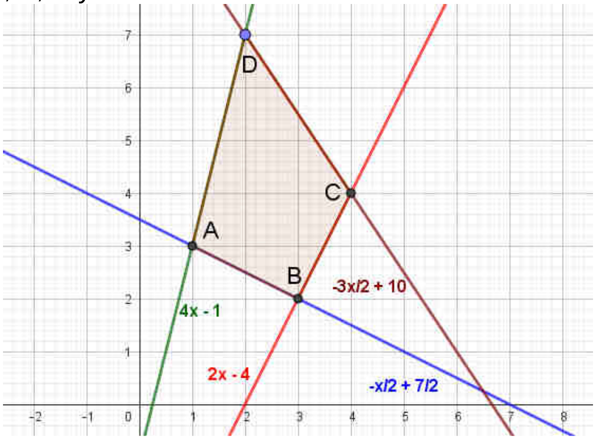
Las desigualdades $x + 2y \geq 7$; $2x - y \leq 4$; $4x - y \geq 1$; $3x + 2y \leq 20$, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, $x + 2y = 7$; $2x - y = 4$; $4x - y = 1$; $3x + 2y = 20$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$$y = -x/2 + 7/2; \quad 2x - 4 = y; \quad 4x - 1 = y; \quad y = -3x/2 + 10.$$

Representamos gráficamente el recinto cerrado convexo delimitado por las desigualdades, y observamos que los vértices de dicho recinto son el A, B, C y D.

Calculamos dichos vértices A, B, C y D resolviendo las ecuaciones de dos en dos.




De $y = -x/2 + 7/2$ e $y = 4x - 1$, tenemos $-x/2 + 7/2 = 4x + 1 \rightarrow -x + 7 = 8x - 2 \rightarrow 9 = 9x$, con lo cual resulta $x = 1$ e

$y = 4\cdot(1) - 1 = 3$, y el vértice es A(1, 3).

De $y = y = -x/2 + 7/2$ e $y = 2x - 4$, tenemos $-x/2 + 7/2 = 2x - 4 \rightarrow -x + 7 = 4x - 8 \rightarrow 15 = 5x$, con lo cual resulta $x = 3$ e $y = 2\cdot(3) - 4 = 2$, y el vértice es B(3, 2).

De $y = 2x - 4$ e $y = -3x/2 + 10$, tenemos $2x - 4 = -3x/2 + 10 \rightarrow 4x - 8 = -3x + 20 \rightarrow 7x = 28$, con lo cual resulta $x = 4$ e $y = 2(4) - 4 = 4$, y el vértice es C(4, 4).

De $y = 4x - 1$ e $y = -3x/2 + 10$, tenemos $4x - 1 = -3x/2 + 10 \rightarrow 8x - 2 = -3x + 20 \rightarrow 11x = 22$, con lo cual resulta $x=2$ e $y = 4(2) - 1 = 7$, y el vértice es D(2, 7).

(b)

Obtenga el valor máximo de la función $F(x, y) = x + 3y$ en el recinto anterior, así como el punto donde se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa de limitada por las restricciones, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos *F* en los puntos anteriores A(1, 3), B(3, 2), C(4, 4) y D(2, 7). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

$F_A(1, 3) = (1) + 3(3) = 10$; $\quad F_B(3, 2) = (3) + 3(2) = 9$;

$F_C(4, 4) = (4) + 3(4) = 16$; $\quad \mathbf{F_D(2, 7) =} (2) + 3(7) \mathbf{= 23.}$

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 23** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice D(2, 7).**

**22_Mod_6_EJERCICIO 2_ BLOQUE A**

Se considera las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 8 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$, donde a es un número real.

a) (0.75 puntos) Determine los valores de a para que la matriz A sea no invertible.
b) (1 punto) Para a = 5, calcule la inversa de la matriz A.
c) (0.75 puntos) Para a = 5, resuelva la ecuación matricial A·X = B.

**Solución**

Se considera las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 8 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$, donde a es un número real.

(a)
Determine los valores de a para que la matriz A sea no invertible.

La matriz A no es invertible si det(A) = |A| = 0.

Como $|A| = \begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ 8 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{columnla} \end{matrix} = a\cdot(a^2 - 16) = a\cdot(a - 4)\cdot(a + 4)$.

**Luego si a = 0 y a = ± 4, no existe** $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$**.**

(b)
Para a = 5, calcule la inversa de la matriz A.

Para a = 5, tenemos $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $|A| = 5\cdot(5^2 - 16) = 45$, $A^t = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 25 & -10 & 0 \\ -40 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj(A^t) = \frac{1}{45}\cdot\begin{pmatrix} 25 & -10 & 0 \\ -40 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/9 & -2/9 & 0 \\ -8/9 & 5/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

(c)
Para a = 5, resuelva la ecuación matricial A·X = B.

Para a = 5 hemos visto que existe $A^{-1} = \dfrac{1}{45}\cdot\begin{pmatrix} 25 & -10 & 0 \\ -40 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Multiplicando por la izquierda A·X = B por $A^{-1} \rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B \rightarrow I_3\cdot X = A^{-1}\cdot B$, de donde **$X = A^{-1}\cdot B$.**

Luego **$X = A^{-1}\cdot B$ =** $\dfrac{1}{45}\cdot\begin{pmatrix} 25 & -10 & 0 \\ -40 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{45}\cdot\begin{pmatrix} 45 \\ -90 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$**.**

**22_Mod_6_EJERCICIO 3_ BLOQUE B**

Los ingresos (I) y costes (C) de una discoteca, en miles de euros, en función del número de horas diarias que permanece abierta, vienen dados por las funciones: $I(x) = x^3 - x$; $C(x) = x^3 - x^2 + 6$, respectivamente. Sabiendo que la licencia del ayuntamiento no permite que este tipo de local permanezca abierto más de 8 horas diarias, halle:

a) (0.5 puntos) La función beneficio en función del número de horas diarias que la discoteca permanece abierta.
b) (0.5 puntos) El número de horas que debe permanecer abierta para obtener beneficios.
c) (0.75 puntos) En qué momento se tienen las mayores pérdidas y a cuánto ascienden.
d) (0.75 puntos) El tiempo que debe permanecer abierta para obtener el máximo beneficio y a cuánto asciende.

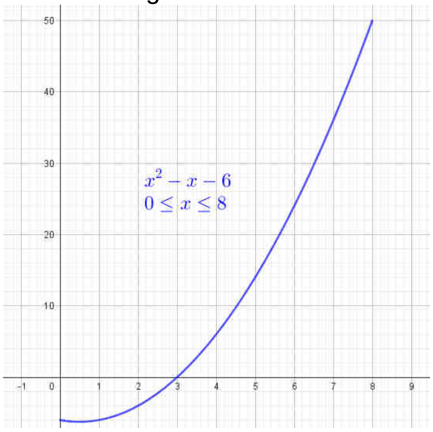
**Solución**

Los ingresos (I) y costes (C) de una discoteca, en miles de euros, en función del número de horas diarias que permanece abierta, vienen dados por las funciones: $I(x) = x^3 - x$; $C(x) = x^3 - x^2 + 6$, respectivamente. Sabiendo que la licencia del ayuntamiento no permite que este tipo de local permanezca abierto más de 8 horas diarias, halle:
(a)
La función beneficio en función del número de horas diarias que la discoteca permanece abierta.

**La función beneficio es B(x) =** ingresos - costes = $I(x) – C(x) = x^3 - x - x^3 + x^2 - 6 =$ $\mathbf{x^2 - x - 6}$, definida en [0, 8].
(b)
El número de horas que debe permanecer abierta para obtener beneficios.

La gráfica de B(x) es la de una parábola así (∪), porque el número que multiplica a $x^2$ es positivo, y abscisa de su vértice (es un mínimo) en la solución de $B'(x) = 0 = 2x - 1$, luego x= 1/2 y el vértice es V(1/2, B(1/2)) = V(0'5, -6'25). De $B(x) = 0 \rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$, de donde x = 3 y x = -2 que no está en el dominio.
Pasa por los puntos (0, -6), (0'5, -6'25) y (8, 50).

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de su gráfica es:




**Observando la gráfica la discoteca debe permanecer abierta de 3 a 8 para producir beneficios, es decir a partir de las 3 horas de estar abierta.**
(c)
En qué momento se tienen las mayores pérdidas y a cuánto ascienden.

**Las mayores perdida se producen en el vértice, es decir cuando lleva abierta 1/2 hora (x = 1/2) y asciendan a menos 6250 euros.**
(d)
El tiempo que debe permanecer abierta para obtener el máximo beneficio y a cuánto asciende.

**Hemos visto en el apartado (b) que la discoteca produce beneficios a partir de las 3 horas de esta abierta y observando la gráfica el máximo beneficio se produce en la hora ocho (x = 8) y es de 50000 euros.**

**22_Mod_6_EJERCICIO 4_ BLOQUE B**

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} ax^2 + bx + 2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{4}{x+1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ con a y b números reales.

a) (1 punto) Calcule a y b para que la función f sea continua y derivable.
b) (0.75 puntos) Para a = -1 y b = 1, realice un esbozo de la gráfica de la función f.
c) (0.75 puntos) Para a = -1 y b = 1, halle el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de f, la recta x = 1 y el eje OX.

**Solución**

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} ax^2 + bx + 2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{4}{x+1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ con a y b números reales.

(a)
Calcule a y b para que la función f sea continua y derivable.

Como la función polinómica tiene que ser continua y derivable en R, lo será en x = 1. Estudiamos continuidad y derivabilidad en x = 1.

La función f(x) es continua en x = 1 si $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$

$f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (ax^2+bx+2) = a+b+2$. $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} \frac{4}{x+1} = 4/2 = 2$. Igualando **a + b + 2 = 2, a + b = 0.**

La función f(x) es derivable en x = 1 si $f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$, veremos la continuidad de la derivada.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+2 & \text{si } x\le 1 \\ \dfrac{4}{x+1} & \text{si } x>1 \end{cases},\quad f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & \text{si } x\le 1 \\ \dfrac{-4}{(x+1)^2} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} (2ax+b) = 2a+b$. $f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{-4}{(x+1)^2} = -4/4 = -1$. Igualando **2a + b = -1.**

Tenemos $a = -b \to 2(-b) + b = -1 \to -b = -1$, **es decir b = 1 y a = -1.**

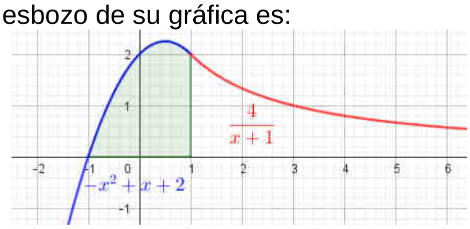
(b)
Para a = -1 y b = 1, realice un esbozo de la gráfica de la función f.

Para a = -1 y b = 1, $f(x)=\begin{cases} -x^2+x+2 & \text{si } x\le 1 \\ \dfrac{4}{x+1} & \text{si } x>1 \end{cases}$. $f'(x)=\begin{cases} -2x+1 & \text{si } x\le 1 \\ \dfrac{-4}{(x+1)^2} & \text{si } x>1 \end{cases}$

Si $x \le 1$, $f(x) = -x^2 + x + 2$ y su gráfica es la de un trozo de parábola así ($\cap$), porque el número que multiplica a $x^2$ es negativo, y abscisa de su vértice (es un máximo) en la solución de $f'(x) = 0 = -2x + 1$, luego x = 1/2 y el vértice es V(1/2, f(1/2)) = V(0'5, 2'25). De $f(x) = 0 = x^2 - x - 2 \to x = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm 3}{2}$, de donde x = -1 y x = 2 que no está en el dominio. Pasa por los puntos (0, 2), (0'5, 2'25) y (1, 2).

Si x > 1, f(x) = 4/(x + 1) y su gráfica es la de un trozo de hipérbola, siempre decreciente ( f '(x) < 0), con asíntota vertical en x = -1, que no está en su dominio, asíntota horizontal en y = 0, y pasando por los puntos (1, 2) y (3, 1).

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de su gráfica es:




(c)
Para a = -1 y b = 1, halle el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de f, la recta x = 1 y el eje OX.

Para a = -1 y b = 1, $f(x)=\begin{cases} -x^2+x+2 & \text{si } x\le 1 \\ \dfrac{4}{x+1} & \text{si } x>1 \end{cases}$.

**Área =** $\int_{-1}^{1}(-x^2+x+2)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{1}$ **= [ (-1/3 + 1/2 + 2) - (1/3 + 1/2 - 2)] $u^2$ = 10/3 $u^2$ ≅ 3'3333 $u^2$.**

**22_Mod_6_EJERCICIO 5_ BLOQUE C**

Se ha llevado a cabo una encuesta en un centro educativo para saber qué actividades extraescolares se realizan por la tarde. El 80% de los encuestados practican deporte o estudian idiomas, el 35% realizan ambas actividades y el 60% no estudian idiomas.

a) Elegido un estudiante de ese centro al azar, calcule la probabilidad de que:

i) (0.75 puntos) Practique deporte y no estudie idiomas.

ii) (0.5 puntos) Estudie idiomas y no practique deporte.

iii) (0.5 puntos) Haga solamente una de las dos actividades.
iv) (0.25 puntos) No haga ninguna de las dos actividades.
b) (0.5 puntos) ¿Son independientes los sucesos “Practicar deporte” y “Estudiar idiomas”?

**Solución**

Se ha llevado a cabo una encuesta en un centro educativo para saber qué actividades extraescolares se realizan por la tarde. El 80% de los encuestados practican deporte o estudian idiomas, el 35% realizan ambas actividades y el 60% no estudian idiomas.
(a)
Elegido un estudiante de ese centro al azar, calcule la probabilidad de que:
(i) Practique deporte y no estudie idiomas.

Sean los sucesos A = ”practicar deporte” y B = “estudiar idiomas”.

Nos dan p(A ó B) = $p(A\cup B)$ = 80% = 0’8, p(A y B) = $p(A\cap B)$ = 35% = 0’35, $p(B^C)$ = 60% = 0’6, de donde tenemos que p(B) = 1 - $p(B^C)$ = 1 - 0’6 = 0’4.

Me están pidiendo **p(practica deporte y no estudia idiomas) = p(A y $B^C$) = $p(A\cap B^C)$** =
= p(A) – $p(A\cap B)$ = {**} = 0’75 – 0’35 **= 0’4.**

{**} De $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) \rightarrow$ 0’8 = p(A) + 0’4 – 0’35 $\rightarrow$ p(A) = 0’8 - 0’4 + 0’35 = 0’75.
(a)
Elegido un estudiante de ese centro al azar, calcule la probabilidad de que:
(ii) Estudie idiomas y no practique deporte.

Me están pidiendo **p(estudie idiomas y no practique deporte) = p(B y $A^C$) = $p(B\cap A^C)$** =
= p(B) - $p(A\cap B)$ = 0’4 - 0’35 **= 0’05.**
(a)
Elegido un estudiante de ese centro al azar, calcule la probabilidad de que:
(iii) Haga solamente una de las dos actividades.

Me están pidiendo **p(A y noB) + p(B y no A) = $p(A\cap B^C)$ + $p(B\cap A^C)$ =** 0’4 + 0’05 **= 0’45.**
(a)
Elegido un estudiante de ese centro al azar, calcule la probabilidad de que:
(iv) No haga ninguna de las dos actividades.

Me están pidiendo **p(no A y no B) = $p(A^C\cap B^C)$ =** {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = 1 - $p(A\cup B)$ =
= 1 - 0’8 **= 0’2.**
(b)
¿Son independientes los sucesos “Practicar deporte” y “Estudiar idiomas”?

Sabemos que A y B son independientes si $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$

Como **$p(A\cap B)$ = 0’35 $\neq$ $p(A)\cdot p(B)$** = 0’75·0’4 **= 0’3, los sucesos “Practicar deporte” y “Estudiar idiomas” no son independientes.**

**22_Mod_6_EJERCICIO 6_ BLOQUE C**

Del total de personas vacunadas en un país para prevenir una enfermedad, el 48% recibió la vacuna A, el 35% la vacuna B y el resto la vacuna C.
La efectividad de la vacuna A se sitúa en el 70%, la de B en el 95% y la de C en el 94%. Elegida al azar una persona vacunada,
a) (1.25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido vacunada con A y no le sea efectiva?
b) (0.75 puntos) ¿Qué probabilidad hay de que la vacuna le sea efectiva?
c) (0.5 puntos) Sabiendo que la vacuna no le ha sido efectiva, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido vacunada con C?

**Solución**

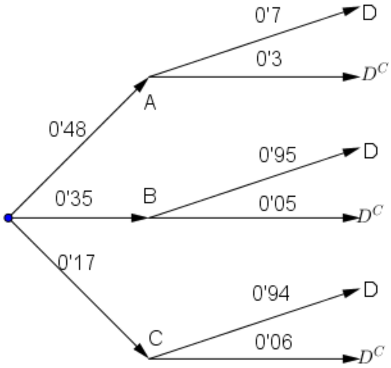
Del total de personas vacunadas en un país para prevenir una enfermedad, el 48% recibió la vacuna A, el 35% la vacuna B y el resto la vacuna C.
La efectividad de la vacuna A se sitúa en el 70%, la de B en el 95% y la de C en el 94%. Elegida al azar una persona vacunada,

(a)
¿Cuál es la probabilidad de que haya sido vacunada con A y no le sea efectiva?

Llamemos A, B, C, D y $D^C$, a los sucesos siguientes, “vacuna A”, “vacuna B”, “vacuna C”, "sea efectiva" y " no sea efectiva", respectivamente.

Datos del problema: p(A) = 48% = 0’48; p(B) = 35% = 0’35; p(D/A) = 70% = 0’7; p(D/B) = 95% = 0’95, p(D/C) = = 94% = 0’94, …

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).




Me piden **p(ser vacunada con A y no le sea efectiva) = p($A \cap D^C$) =** p(A)·p($D^C$/A) = (0’48)·(0’3) **= 0’144.**
(b)
¿Qué probabilidad hay de que la vacuna le sea efectiva?

Me piden **p(la vacuna sea efectiva) = p(D).**

Por el teorema de la Probabilidad Total:

Tenemos **p(D)** = p(A)·p(D/A) + p(B)·p(D/B) + p(C)·p(D/C) =
= (0’48)·(0’7) + (0’35)·(0’95) + (0’17)·(0’94) **= 0’8283**.
(c)
Sabiendo que la vacuna no le ha sido efectiva, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido vacunada con C?

Me piden **p(sea vacunada con C sabiendo que no ha sido efectiva) = p(C/$D^C$).**

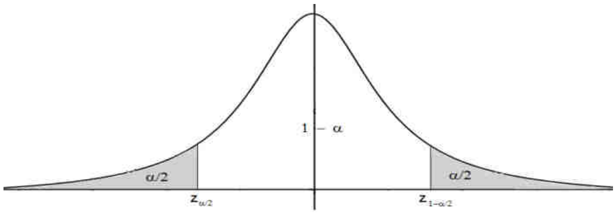
Por la fórmula de Bayes:

Luego **p(C/$D^C$) =** $\dfrac{p(C \cap D^C)}{p(D^C)} = \dfrac{p(C)\cdot p(D^C/C)}{1 - p(D)}$ = ( (0’17)·(0’06) )/(1 - 0’8283) **= 6/101** ≅ **0’05940594.**

**22_Mod_6_EJERCICIO 7_ BLOQUE D**
Se desea estimar la proporción de jóvenes de una localidad que están suscritos a una determinada plataforma de televisión. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 100 jóvenes de los que 36 afirman estar suscritos a dicha plataforma.
a) (1.5 puntos) Determine un intervalo de confianza, con un nivel del 92%, para la proporción de jóvenes que están suscritos a esta plataforma.
b) (1 punto) Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño muestral mínimo que se debería tomar si se quisiera que el error máximo fuera 0.025.

**Solución**

Sabemos que para la proporción poblacional **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$, sigue una $N\left(\hat{p}, \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$, y generalmente escribimos $\hat{p} \approx N\left(\hat{p}, \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$ o $\hat{p} \rightarrow N\left(\hat{p}, \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$




También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción es:

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que en la proporción es $\hat{p} = (a + b)/2$, el error máximo de la estimación es E =

$= z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, para el intervalo de la proporción. Pero la amplitud del intervalo es $b - a = 2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} =$

$= 2\cdot E$, de donde $E = (b – a)/2$, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} =$

$= \frac{2\cdot(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{(b-a)^2}$.

Se desea estimar la proporción de jóvenes de una localidad que están suscritos a una determinada plataforma de televisión. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 100 jóvenes de los que 36 afirman estar suscritos a dicha plataforma.

(a)

Determine un intervalo de confianza, con un nivel del 92%, para la proporción de jóvenes que están suscritos a esta plataforma.

Datos del problema: n = 100, $\hat{p} = \frac{36}{100} = 0'36$, $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0'36 = 0'64$, nivel de confianza = 92% = 0'92 =

= 1 - α, de donde α = 0'08, con la cual α/2 = (0'08)/2 = 0'04.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'04 = 0'96$, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'96 no viene, y la más próxima es 0'9599 y corresponde a 1'75, luego $z_{1-\alpha/2} = 1'75$ (*si interpoláramos entre 0'9599 y 0'9608 tendríamos $z_{1-\alpha/2} = 1'751$*), por tanto el intervalo de confianza pedido es::

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(0'36 - 1'75\cdot\sqrt{\frac{0'36\cdot0'64}{100}}, 0'36 + 1'75\cdot\sqrt{\frac{0'36\cdot0'64}{100}}\right) =$$

**= (0'276; 0'444)**

(b)

Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño muestral mínimo que se debería tomar si se quisiera que el error máximo fuera 0.025.

Datos del problema: $\hat{p} = 0'36$, $\hat{q} = 0'64$, error = E ≤ 0'025, nivel de confianza = 92% → $z_{1-\alpha/2} = 1'75$

De $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, tenemos $n \ge \frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} = \frac{(1'75)^2\cdot0'36\cdot0'64}{(0'025)^2}$ = 1128'96, por tanto **el tamaño mínimo de jóvenes que se deberían seleccionar es de n = 1129.**

**22_Mod_6_EJERCICIO 8_ BLOQUE D**

La vida útil de un determinado modelo de teléfono móvil (en meses) se distribuye según una ley Normal de varianza 9.61 meses$^2$. En una muestra de 10 teléfonos, la vida útil de los mismos ha sido:

30.6 30 31.3 29.7 32.3 32 32.8 31.5 31.2 30.5

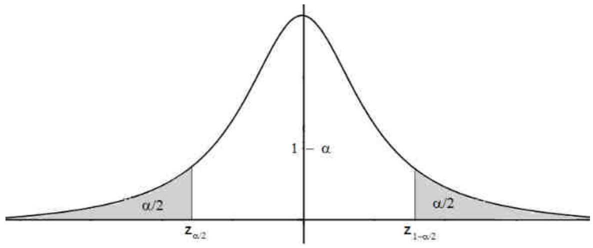
a) (1.5 puntos) Determine un intervalo de confianza para estimar la vida útil de este modelo de teléfono móvil con un nivel de confianza del 97%.

b) (1. punto) Determine el tamaño mínimo muestral para que, con el mismo nivel de confianza, el error que se comete al estimar la duración media de la vida útil de este modelo de teléfono móvil sea inferior a 0.15 meses.

**Solución**

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* **MEDIA** MUESTRAL $\bar{x}$ , sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ), y

generalmente escribimos $\bar{x} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\bar{x} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$




También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

I.C. (μ) = $\left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ = (a,b); también sabemos que $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *son los puntos críticos* de la variable aleatoria Normal tipificada Z ≈ N(0,1) que verifica $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

*También sabemos que el error máximo de la estimación es E =* $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= (b - a)/2, para el intervalo* de *confianza de las medias, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2$.

La vida útil de un determinado modelo de teléfono móvil (en meses) se distribuye según una ley Normal de varianza 9’61 meses$^2$. En una muestra de 10 teléfonos, la vida útil de los mismos ha sido:

30.6 30 31.3 29.7 32.3 32 32.8 31.5 31.2 30.5

(a)

Determine un intervalo de confianza para estimar la vida útil de este modelo de teléfono móvil con un nivel de confianza del 97%.

Datos del problema: varianza = $\sigma^2$ = 9’61, luego la desviación típica es σ = = √(9’61) = 3’1; media muestral $\bar{x}$ = = (30.6 + 30 + 31.3 + 29.7 + 32.3 + 32 + 32.8 + 31.5 + 31.2 + 30.5)/10 = 311’9/10 = 31’19; n = 10; nivel de confianza = 97% = 0’97 = 1 - α, de donde α = 0’03, con la cual α/2 = (0’03)/2 = 0’015.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha/2})$ = 1 - α/2 = 1 - 0’015 = 0’985, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0’985 si viene, y corresponde al punto crítico $z_{1-\alpha/2}$ = 2’17, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

**I.C.(μ) =** $\left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(31'19 - 2'17\cdot\frac{3'1}{\sqrt{10}}, 31'19 + 2'17\cdot\frac{3'1}{\sqrt{10}}\right)$ ≅ **(29’0627, 33’3173) para la vida útil de los móviles en meses.**

(b)

Determine el tamaño mínimo muestral para que, con el mismo nivel de confianza, el error que se comete al estimar la duración media de la vida útil de este modelo de teléfono móvil sea inferior a 0.15 meses.

Datos del problema: σ = 3’1; error = E ≤ 0’15; nivel de confianza 97% → $z_{1-\alpha/2}$ = 2’17.

De error E ≤ $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 0’15, tenemos n ≥ $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'17\cdot 3'1}{0'15}\right)^2$ ≅ 2011’223, tenemos que **el tamaño de móviles que hay que seleccionar es de 2012.**