22_Mod_5_EJERCICIO 1_ BLOQUE A

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -a-1 \\ -1 & a & a+1 \\ 1 & -3 & -a \end{pmatrix}$ donde a es un número real. Determine de manera justificada:

a) (0.75 puntos) Los valores de a para los que la matriz A tiene inversa.
b) (0.75 puntos) Las matrices A^2, A^3 y A^{2022} para a = 4.
c) (1 punto) La matriz X que verifica que $X \cdot A = I_3$ para a = 3.

Solución

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -a-1 \\ -1 & a & a+1 \\ 1 & -3 & -a \end{pmatrix}$ donde a es un número real. Determine de manera justificada:

(a)
Los valores de a para los que la matriz A tiene inversa.
Existe la matriz inversa de A si $|A| \neq 0$.

Como $\mathbf{|A|} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -a-1 \\ -1 & a & a+1 \\ 1 & -3 & -a \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1+2F_2 \\ \\ F_3+F_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2a-3 & a+1 \\ -1 & a & a+1 \\ 0 & a-3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{matrix} = -(-1)(2a-3) - (a+1)\cdot(a-3)) =$

$= (2a - 3 - a^2 + 2a + 3) = - a2 + 4a = \mathbf{a\cdot(-a + 4)}$**.**

Luego si $\mathbf{a \neq 0}$ **y** $\mathbf{a \neq 4}$, **existe** $\mathbf{A^{-1}} = \dfrac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$**.**

(b)
Las matrices A^2, A^3 y A^{2022} para a = 4.

Para a = 4 tenemos $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = A.$$

$$A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = A.$$

$A^{2022} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = A$. **Luego** $\mathbf{A^{2022} = A}$**.**

(c)
La matriz X que verifica que $X\cdot A = I_3$ para a = 3.

Para a = 3 tenemos $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & a & 4 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ y hemos visto en el aparatado (a) que existe la inversa A^{-1}.

Multiplicando por la derecha $X\cdot A = I_3$ por $A^{-1} \rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1} = I_3\cdot A^{-1} \rightarrow I_3\cdot X = A^{-1}$, de donde $\mathbf{X = A^{-1}}$**.**

Tenemos $|A| = 3\cdot(-3 + 4) = 3$, $A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$,

$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} Adj(A^t) = \dfrac{1}{3}\cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & -4/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Luego $\mathbf{X = A^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & -4/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$**.**

22_Mod_5_EJERCICIO 2_ BLOQUE A

(2.5 puntos) Una sastrería dispone de $70m^2$ de tela de lino y de $150m^2$ de tela de algodón. En la confección de un traje se emplea $1m^2$ de tela de lino y $3m^2$ de tela de algodón, y en un vestido se necesitan $2m^2$ de tela de cada tipo. Se obtienen 60 euros de beneficio por cada traje y 70 euros por cada vestido. Determine el número de trajes y vestidos que se deben confeccionar para obtener el máximo beneficio, así como dicho beneficio máximo.

Solución

Es un problema de programación lineal.

Sea x = nº de trajes. Sea y = nº de vestidos.

	Tela de lino	Tela de algodón	Beneficio
Traje (x)	x	3x	60 €
Vestido B (y)	2y	2y	70 €
Total	70 m^2	150 m^2	

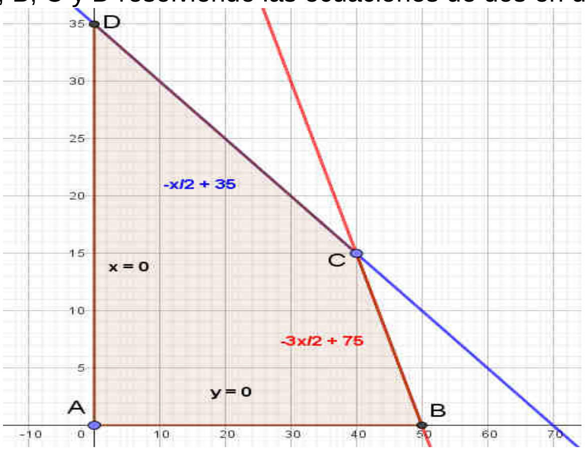
De "un traje se emplea 1m^2 de tela de lino y un vestido se necesitan 2m^2 de tela de lino" $\rightarrow$ x + 2y $\le$ 70.
De "un vestido se necesitan 2m^2 de tela de algodón y un traje se emplea 2m^2 de tela de algodón" $\rightarrow$ 3x+2y$\le$ 150.
De "Se fabrica algun traje y algún vestido" $\rightarrow$ x $\ge$ 0, y $\ge$ 0
De "Se obtienen 60 euros de beneficio por cada traje y 70 euros por cada vestido", tenemos que la función beneficio a optimizar es F(x, y) = 60x + 70y.

Resumiendo:
Función a optimizar es F(x, y) = 60x + 70y.
Restricciones: x + 2y $\le$ 70; 3x + 2y $\le$ 150; y $\ge$ 0; x $\ge$ 0.

Las desigualdades x + 2y $\le$ 70; 3x + 2y $\le$ 150; y $\ge$ 0; x $\ge$ 0, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, x + 2y = 70; 3x + 2y = 150; y = 0; x = 0.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos
y = -x/2 + 35; y = -3x/2 + 75; y = 0; x = 0.
Representamos gráficamente el recinto cerrado convexo delimitado por las desigualdades, y observamos que los vértices de dicho recinto son el A, B, C y D.

Calculamos dichos vértices A, B, C y D resolviendo las ecuaciones de dos en dos.



De x = 0 e y = 0, tenemos el vértice A(0, 0).

De y = 0 e y = -3x/2 + 75, tenemos 0 = -3x/2 +75 $\rightarrow$ 3x = 150, con lo cual x = 50, y el vértice es B(50, 0).

De y = -x/2 + 35 e y = -3x/2 + 75, tenemos -x/2 + 35 = -3x/2 + 75 $\rightarrow$ -x + 70 = -3x + 150 $\rightarrow$ 2x = 80, con lo cual x = 40 e y = -(40)/2 + 35 = 15, y el vértice es C(40, 15).

De y = -x/2 + 35 y x = 0, tenemos y = 35, el vértice 2s D(0, 35).

Veamos el máximo de la función **F(x, y) = 60x + 70y** en el recinto anterior, así como el punto donde se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa de limitada por las restricciones, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos *F* en los puntos anteriores A(0, 0), B(50, 0), C(40, 15) y D(0, 35). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

$F_A(0, 0) = 60(0) + 70(0) = 0$; $F_B(50, 0) = 60(50) + 70(0) = 3000$;
$\mathbf{F_C(40, 15) =} 60(40) + 70(15) \mathbf{= 3450}$; $F_D(0, 35) = 60(0) + 70(35) = 2450$.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 3450** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(40, 15), es decir el beneficio máximo es de 3450 € y se obtiene confeccionando 40 trajes y 15 vestidos.**

22_Mod_5_EJERCICIO 3_ BLOQUE B

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} a(x+1)^2 & \text{si } -3 \le x \le 1 \\ \dfrac{bx^2}{2}+2 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$ con a y b números reales.

a) (1.25 puntos) Determine los valores de a y b para que f sea continua y derivable.
b) (1.25 puntos) Para a = 1 y a = 2, esboce la gráfica de la función f y calcule el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje OX y las rectas x = -2 y x = 1.

Solución

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} a(x+1)^2 & \text{si } -3 \le x \le 1 \\ \dfrac{bx^2}{2}+2 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$ con a y b números reales.

(a)
Determine los valores de a y b para que f sea continua y derivable.

Como la función ha de ser continua en [-3, 2] y derivable en (-3, 2) tendrá que ser continua y derivable en x = 1.

Veamos la continuidad en x = 1.
La función f(x) es continua en x = 1 si $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$

$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} a\cdot(x+1)^2 = a\cdot 4 = 4a$. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\dfrac{bx^2}{2}+2\right) = b/2 + 2$. Igualando tenemos **4a = b/2 + 2.**

$f(x)=\begin{cases} a(x+1)^2 & \text{si } -3 \le x \le 1 \\ \dfrac{bx^2}{2}+2 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$, $f'(x)=\begin{cases} 2a(x+1) & \text{si } -3 \le x \le 1 \\ bx & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$

La función f(x) es derivable en x = 1 tenemos $f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$, veremos la continuidad de la derivada.
$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} 2a\cdot(x+1) = 2a\cdot(2) = 4a$. $f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} (bx) = b$. Igualando **b = 4a.**
De donde $4a = 4a/2 + 2 \rightarrow 2a = 2$, **de donde a = 1 y b = 4.**
(b)
Para a = 1 y a = 2, esboce la gráfica de la función f y calcule el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje OX y las rectas x = -2 y x = 1.

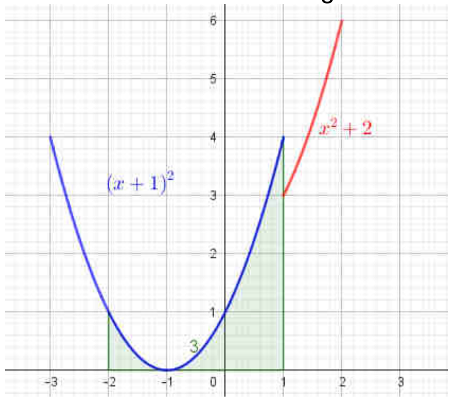
Para a = 1 y a = 2 tenemos $f(x)=\begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } -3 \le x \le 1 \\ x^2+2 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$

Si $-3 \le x \le 1$, $f(x) = (x+1)^2$ y sabemos que su gráfica es la de un trozo de parábola así (∪), porque el número que multiplica a x^2 es positivo, parecida a x^2 pero desplazada una unidad a la izquierda en OX, abscisa de su vértice (es un mínimo) en la solución de $f'(x) = 0 = 2\cdot(x+1)$, luego x = -1 y el vértice es V(-1, f(-1)) = V(-1, 0). Tambien pasa por (-3, 4).

Si $1 < x \le 2$, $f(x) = x^2 + 2$ y sabemos que su gráfica es la de un trozo de parábola así (∪), porque el número que multiplica a x^2 es positivo, parecida a x^2 pero desplazada dos unidades a la arriba en OY, abscisa de su vértice (es un mínimo) en la solución de $f'(x)=0 = 2x$, luego x= 0 (No está en su dominio). También pasa por los puntos $(1^+, 3)$ y (2, 4).

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de su gráfica es:

La gráfica de f(x) son sotrozos de parábola de la forma (∪) por que el número que multiplica a x en ambas es positivo. Teniendo en cuenta todo lo anterior un esbozo de su gráfica es:



Área = $\int_{-2}^{1}(x+1)^2dx = \left[\dfrac{(x+1)^3}{3}\right]_{-2}^{1}$ = [(8/3) - (-1/3)] u^2 **= 9/3 u^2 = 3 u^2.**

22_Mod_5_EJERCICIO 4_ BLOQUE B

Se considera la función $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$.

a) (1 punto) Determine el dominio de la función y estudie su monotonía y curvatura.
b) (1 punto) Calcule las ecuaciones de las asíntotas de f si existen. Calcule los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas.
c) (0.5 puntos) Represente la gráfica de la función f.

Solución

Se considera la función $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$.

(a)
Determine el dominio de la función y estudie su monotonía y curvatura.

El dominio de la función f **es R - {-2}.**

La monotonía es el estudio de f '(x)

$f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$, $f'(x) = \dfrac{1\cdot(x+2) - 1\cdot(x-3)}{(x+2)^2} = \dfrac{5}{(x+2)^2}$.

De f '(x) = 0 tenemos **5 = 0, lo cual es absurdo luego no hay extremos y la función siempre es estrictamente creciente o decreciente.**

Como f '(0) = 5/8 > 0, **f(x) es estrictamente creciente** (↗) **en R - {-2}.**

La curvatura es el estudio de f ''(x)

$f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2}$, $f''(x) = \dfrac{0 - 5\cdot 2\cdot(x+2)}{(x+2)^4} = \dfrac{-10\cdot(x+2)}{(x+2)^4}$

De f ''(x) = 0 tenemos -10·(x + 2) = 0**, de donde x = -2 que no es un punto de inflexión porque es la asíntota vertical.**

Como f ''(0) = -20/16 < 0, **f(x) es cóncava (∩) en R – {-2}.**

(c)
Calcule las ecuaciones de las asíntotas de f si existen. Calcule los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas.

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ *, la recta x = a es una asíntota vertical de f(x).*

Como $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right) = \dfrac{-5}{0^+} = -\infty$, **f(x) tiene una asíntota vertical en x = -2.**

Posición relativa $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \left(\frac{x - 3}{x + 2}\right) = \frac{-5}{0^-} = +\infty$

Si $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$*, la recta y = b es una asíntota horizontal de f(x) en ∞.*

Como $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x - 3}{x + 2}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} (1) = 1$, **la recta y = 1 es una asíntota horizontal (A.H.) de la gráfica de f en ±∞.**

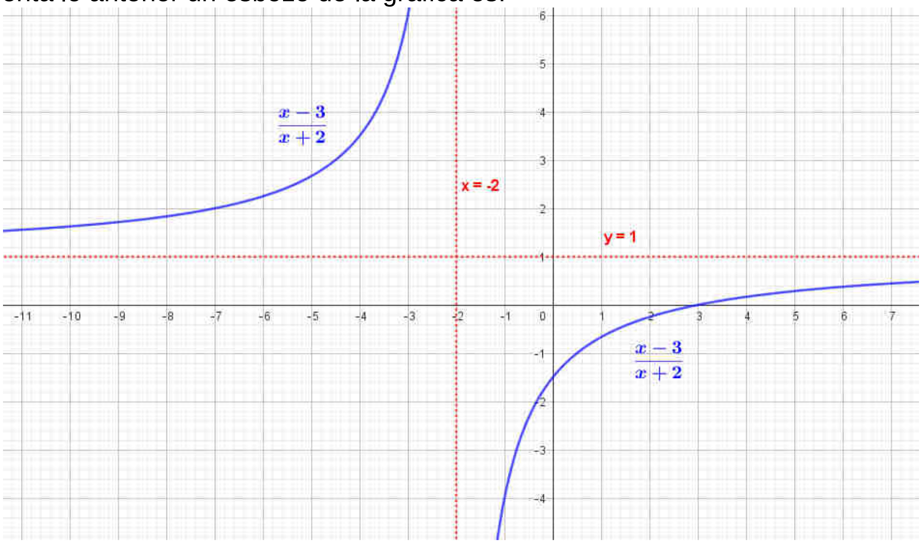
Posición relativa

Como $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x - 3}{x + 2}\right) = 1^+$, **la gráfica de f está por encima de la asíntota horizontal y = 1 en -∞.**

Como $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x - 3}{x + 2}\right) = 1^-$, **la gráfica de f está por debajo de la asíntota horizontal y = 1 en +∞.**

(c)
Represente la gráfica de la función f.

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica es:



22_Mod_5_EJERCICIO 5_ BLOQUE C
El 80% de los restaurantes de una localidad admite el pago con tarjeta de crédito, el 50% admite pagar mediante el móvil y el 10% no admite el pago con ninguno de estos métodos. Escogido al azar un restaurante de dicha localidad.
a) Calcule la probabilidad de que el restaurante admita
    i) (1 punto) alguno de estos dos medios de pago.
    ii) (1 punto) Pagar con móvil sabiendo que admite pagar con tarjeta de crédito.
b) (0.5 puntos) ¿Son independientes los sucesos "Pagar con tarjeta" y "Pagar con móvil"?

Solución

El 80% de los restaurantes de una localidad admite el pago con tarjeta de crédito, el 50% admite pagar mediante el móvil y el 10% no admite el pago con ninguno de estos métodos. Escogido al azar un restaurante de dicha localidad.
(a) Calcule la probabilidad de que el restaurante admita
    (i) alguno de estos dos medios de pago.

Sean los sucesos A = ”pago con tarjeta de crédito” y B = “pago con tarjeta de móvil”.

Nos dan p(A) = 0’8, p(B) = 0’5, p(no admite el pago con ninguno de estos métodos) = p(noA y noB) = $p(A^C \cap B^C)$ = 0’2.

Me están pidiendo **p(alguno de estos dos medios de pago) = p(A ó B) = $p(A \cup B)$.**

De $p(A^C \cap B^C)$ = 0’1= {Ley de Morgan}= $p(A \cup B)^C$ = {suceso contrario} = 1 - $p(A \cup B)$, **resulta que $p(A \cup B)$ = 1 - 0’1 =**

= 0’9.

(a) Calcule la probabilidad de que el restaurante admita

(ii) Pagar con móvil sabiendo que admite pagar con tarjeta de crédito.

Me están pidiendo **p(Pagar con móvil sabiendo que admite pagar con tarjeta de crédito) = p(B/A)**

Tenemos **p(B/A) =** p(A∩B)/p(A) = {**} = 0’4/0’8 **= 4/8 = 0’5.**

{**} p(A∪B) = p(A) + p(B) - p(A∩B) → 0’9 = 0’8 + 0’5 - p(A∩B), de donde p(A∩B) = 0’4

(b)

¿Son independientes los sucesos "Pagar con tarjeta" y "Pagar con móvil"?

Los sucesos son independientes si p(A∩B) = p(A)·p(B).

Como **p(A∩B) = 0’4 = p(A)·p(B)** = 0’8·0’5 **= 0’4**, **los sucesos son independientes**.

22_Mod_5_EJERCICIO 6_ BLOQUE C

En una localidad se han vendido 1335 boletos de lotería en tres establecimientos A, B y C. En el estableci-miento A se han vendido 1054 boletos, 99 en B y el resto en C. De los boletos premiados, 5 han sido vendidos en B y 13 en C. Sabemos que 95 de cada 100 boletos vendidos no han obtenido premio. Elegido un boleto al azar, se pide:

a) (1.75 puntos) ¿Cuál es el establecimiento que tiene una mayor probabilidad de haber vendido un boleto no premiado?

b) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que un boleto no premiado haya sido vendido en el estableci-miento A?

Solución

En una localidad se han vendido 1335 boletos de lotería en tres establecimientos A, B y C. En el estableci-miento A se han vendido 1054 boletos, 99 en B y el resto en C. De los boletos premiados, 5 han sido vendidos en B y 13 en C. Sabemos que 95 de cada 100 boletos vendidos no han obtenido premio. Elegido un boleto al azar, se pide:

Este problema se puede realizar utilizando una **tabla de contingencia** (tabla de doble entrada), y después utilizando la definición de probabilidad de Laplace (número de casos favorables partido por número de casos posibles).

	Establecimiento A	Establecimiento B	Establecimiento C	Total
Premiado P		5	13	
No premiado P^C				95%de 1335 = 1268’65
Total	1054	99		1335

Completamos la tabla de contingencia sabiendo que tanto la suma en horizontal como en vertical dan los totales. He puesto en negrita los números que he completado.

	Establecimiento A	Establecimiento B	Establecimiento C	Total
Premiado P	**48’35(decimal)??**	5	13	**66’25 (decimal)??**
No premiado P^C	**1005’65 ??**	**94**	**169**	95%de 1335 = 1268’65
Total	1054	99	**182**	1335

(a)

¿Cuál es el establecimiento que tiene una mayor probabilidad de haber vendido un boleto no premiado?

Calculamos la probabilidad de boletos no premiados en A, B y C

Me piden **$p(A\cap P^C)$ =** $\dfrac{\text{Total de boletos no premiados en A}}{\text{Total de boletos no premiados}}$ **= 1005’65/1268’65 ≅ 0’782**.

Me piden **$p(B\cap P^C)$ =** $\dfrac{\text{Total de boletos no premiados en B}}{\text{Total de boletos no premiados}}$ **= 94/1268’65 ≅ 0’07**.

Me piden **$p(C\cap P^C)$ =** $\dfrac{\text{Total de boletos no premiados en C}}{\text{Total de boletos no premiados}}$ **= 169/1268’65 ≅ 0’1313**.

Por lógica, sin hacer tantos cálculos partiendo de la base que el número de boletos ha de ser un

numero entero, **el establecimiento que tiene más probabilidad de vender un boleto no premiado es el que más boletos ha vendido que es el A.**

(b)

¿Cuál es la probabilidad de que un boleto no premiado haya sido vendido en el establecimiento A?

La probabilidad la hemos cálculo en el apartado (a) y es aproximadamente es 0’782

22_Mod_5_EJERCICIO 7_ BLOQUE D

a) (1.25 puntos) Se divide una población en cuatro estratos de tamaño 60000, 20000, 24000 y 16000 personas. En dicha población se realiza un muestreo estratificado por afijación proporcional, seleccionándose 144 personas del tercer estrato. Determine el tamaño total de la muestra y su composición.

b) (1.25 puntos) Dada la población {1, 4, 7}, establezca todas las muestras posibles de tamaño 2 que se puedan formar mediante muestreo aleatorio simple y determinar la media y la desviación típica de las medias muestrales obtenidas con todas estas muestras.

Solución

(a)

Se divide una población en cuatro estratos de tamaño 60000, 20000, 24000 y 16000 personas. En dicha población se realiza un muestreo estratificado por afijación proporcional, seleccionándose 144 personas del tercer estrato. Determine el tamaño total de la muestra y su composición.

Nos dice que si hay “k” estratos y que el número de elementos de cada estrato es $N_1, N_2, ..., N_k$, y si $n_1, n_2, ...,$ n_k son los elementos de cada una de las muestras de los estratos, el tamaño total de la muestra es $n = n_1 + n_2, +...+ n_k$, y se calculan eligiendo los números $n_1, n_2, ..., n_k$ proporcionales a los tamaños de los estratos $N_1, N_2, ..., N_k$, es decir $\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_2}{N_2} = ... = \frac{n_k}{N_k} = \frac{n}{N}$

En nuestro caso tenemos cuatro estratos de tamaño: $N_1 = 60000$, $N_2 = 20000$, $N_3 = 24000$ y $N_4 = 16000$. Luego $N = 60000 + 20000 + 24000 + 16000 = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 120000$.

De, seleccionar 144 personas del tercer estrato, tenemos $n_3 = 144$.

Luego tenemos: $\frac{n}{N} = \frac{n}{120000} = \frac{n_1}{60000} = \frac{n_2}{20000} = \frac{144}{24000} = \frac{n_4}{16000}$

De $\frac{n}{120000} = \frac{144}{24000}$, tenemos $n = \frac{144 \cdot 120000}{24000} = 720$, luego **el tamaño de la muestra total es de n = 720 personas**.

De $\frac{720}{120000} = \frac{n_1}{60000}$, tenemos $n_1 = \frac{720 \cdot 60000}{120000} = 360$, luego **el tamaño de la muestra del primer estrato es de $n_1 = 360$ personas**.

De $\frac{720}{120000} = \frac{n_2}{20000}$, tenemos $n_2 = \frac{720 \cdot 20000}{120000} = 120$, luego **el tamaño de la muestra del segundo estrato es de $n_2 = 120$ personas**.

De $\frac{720}{120000} = \frac{n_4}{16000}$, tenemos $n_4 = \frac{720 \cdot 16000}{120000} = 96$, luego **el tamaño de la muestra del cuarto estrato es de $n_4 = 96$ personas**.

(b)

Dada la población {1, 4, 7}, establezca todas las muestras posibles de tamaño 2 que se puedan formar mediante muestreo aleatorio simple y determinar la media y la desviación típica de las medias muestrales obtenidas con todas estas muestras.

Solución

Supongo que el muestreo es con reemplazamiento. Hay $3^2 = 9$ muestras con reemplazamiento de tamaño 2. Los resultados pueden verse en la tabla siguiente:

Muestras de tamaño 2	**1 1**	**1 4**	**1 7**	**4 1**	**4 4**	**4 7**	**7 1**	**7 4**	**7 7**
Media de la muestra $\overline{x}_i$	1	2’5	4	2’5	4	5’5	4	5’5	7

La media poblacional es μ = (1 + 4 + 7)/3 = 5/2 **= 4.**

La varianza poblacional es σ^2 = $\dfrac{\sum n_i\cdot(x_i - \bar{x})^2}{N} = \dfrac{(1-4)^2+(4-4)^2+(7-4)^2}{3}$ **= 18/3 = 6.**

El Teorema Central del Límite nos afirma que la media muestral coincide con la media poblacional, es decir $\mu = \bar{x}$, y que la varianza de la distribución muestral de medias σ_X^2 coincide con la varianza de la de la población σ^2 dividida por el tamaño de la muestra **n**, es decir $\sigma_X^2 = \sigma^2/n$.

En nuestro caso la media muestral es $\bar{x} = \mu = 4$, y la varianza de las medias muestrales $\sigma_X^2 = \sigma^2/n$ = 6/2 **= 3. Su desviación típica sería** $\sigma_X = \sqrt{(3)}$**.**

También se podría hacer estudiando la distribución muestral de medias, como puede verse en la tabla que sigue.

x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$	$n_i\cdot(x_i)^2$
1	1	1	1
2'5	2	5	12'5
4	3	12	48
5'5	2	11	60'5
7	1	7	49
$\sum$	**N = 9**	**36**	**171**

La media de la distribución muestral de medias (media de medias) es: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{N} = \dfrac{36}{9}$ **= 4**, que coincide con la media de la población μ **= 3.**

La varianza de la distribución muestral de medias es: $\sigma_X^2 = \dfrac{\sum n_i\cdot(x_i)^2}{N} - \bar{x}^2 = \dfrac{171}{9} - (4)^2$ **= 3**, que coincide con la varianza de la de la población σ^2, dividida por el tamaño de la muestra **n**; es decir $\sigma_X^2 = \sigma^2/n$ = (6)/2 **= 3. Su desviación típica sería** $\sigma_X = \sqrt{(3)}$**.**

22_Mod_5_EJERCICIO 8_ BLOQUE D

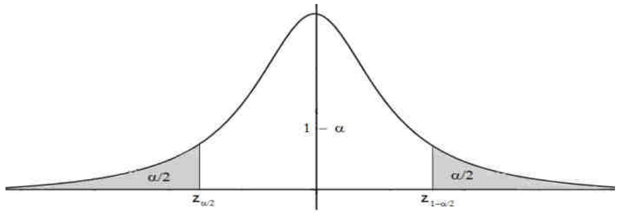
Se desea estimar la proporción de estudiantes de una universidad que proceden de otras provincias, para ello se selecciona una muestra de tamaño 2100 de los que 630 lo cumplen.

a) (1.25 puntos) Calcule un intervalo de confianza con un nivel del 97.5% para estimar la proporción poblacional de estudiantes de esa universidad procedentes de otras provincias.

b) (1.25 puntos) En una nueva muestra que mantiene la misma proporción muestral, y con el mismo nivel de confianza, queremos que el error máximo cometido sea de 0.01. Halle su tamaño mínimo.

Solución

Sabemos que para la proporción poblacional **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$, sigue una $N\left(\hat{p}, \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$, y generalmente escribimos $\hat{p} \approx N\left(\hat{p}, \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$ o $\hat{p} \to N\left(\hat{p}, \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción es:

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = (a, b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que en la proporción es $\hat{p}$ = (a + b)/2, el error máximo de la estimación es E =

$= z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, para el intervalo de la proporción. Pero la amplitud del intervalo es b -a = 2· $z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ = 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es n = $\frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} = = \frac{2\cdot(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{(b-a)^2}$

.

Se desea estimar la proporción de estudiantes de una universidad que proceden de otras provincias, para ello se selecciona una muestra de tamaño 2100 de los que 630 lo cumplen.
(a)
Calcule un intervalo de confianza con un nivel del 97.5% para estimar la proporción poblacional de estudiantes de esa universidad procedentes de otras provincias.

Datos del problema: n = 2100, $\hat{p} = \frac{630}{2100}$ = 0'3, $\hat{q}$ = 1 - $\hat{p}$ = 1 - 0'3 = 0'7, nivel de confianza = 97'5% = 0'975 = 1 - α, de donde α = 1 - 0'975 = 0'025, con la cual α/2 = (0'025)/2 = 0'0125.

De p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - α/2 = 1 - 0'0125 = 0'9875, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que la probabilidad 0'9875 si viene y corresponde a 2'24, por tanto **el intervalo de confianza pedido es**:

$$\textbf{I.C.(p)} = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(0'3 - 2'24\cdot\sqrt{\frac{0'3\cdot 0'7}{1200}}, 0'3 + 2'24\cdot\sqrt{\frac{0'3\cdot 0'7}{1200}}\right) \cong$$

$$\cong \mathbf{(0'2703676;\ 0'329632)}$$

(b)
En una nueva muestra que mantiene la misma proporción muestral, y con el mismo nivel de confianza, queremos que el error máximo cometido sea de 0.01. Halle su tamaño mínimo.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 0'3, $\hat{q}$ = 0'7, error = E ≤ 0'01, nivel de confianza = el mismo 97'5%, por tanto $z_{1-\alpha/2}$ = 2'24.

De E ≤ $z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, tenemos $n \geq \frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} = \frac{(2'24)^2\cdot 0'3\cdot 0'7}{(0'01)^2}$ = 10536'96, por tanto **el tamaño mínimo de estudiantes que sería preciso seleccionar es de n = 10537.**