BLOQUE A

23_ EJERCICIO 1 – Junio (modelo 1) 2023

Sean la función F(x, y) = 5x - 3y y la región del plano R definida mediante las inecuaciones:

$$2x - 3y \le 1; \quad 4x + y \le 9; \quad x + y \le 5; \quad 9x - y \ge 0; \quad y \ge 0.$$

a) (1’3 puntos) Dibuje la región R y calcule sus vértices.
b) (0’5 puntos) Indique razonadamente si los puntos A(2, 2) y B(1, 3’5) pertenecen a la región R.
c) (0’7 puntos) Obtenga los puntos de la región R donde F alcanza el máximo y el mínimo y calcule sus correspondientes valores.

Solución

Es un problema de programación lineal.

Sean la función F(x, y) = 5x - 3y y la región del plano R definida mediante las inecuaciones:

$$2x - 3y \le 1; \quad 4x + y \le 9; \quad x + y \le 5; \quad 9x - y \ge 0; \quad y \ge 0.$$

a)
Dibuje la región R y calcule sus vértices.

Inecuaciones: $2x - 3y \le 1$; $4x + y \le 9$; $x + y \le 5$; $9x - y \ge 0$; $y \ge 0$.

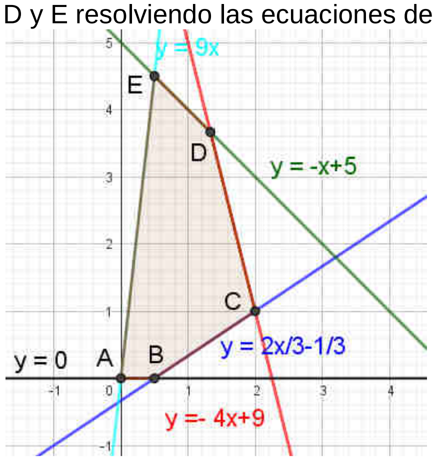
Las desigualdades: $2x - 3y \le 1$; $4x + y \le 9$; $x + y \le 5$; $9x - y \ge 0$; $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, $2x - 3y = 1$; $4x + y = 9$; $x + y = 5$; $9x - y = 0$; $y = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las “y” y tenemos

$$y = 2x/3 - 1/3\ (\ge);\ y = -4x + 9\ (\le);\ y = -x + 5\ (\le);\ y = 9x\ (\le);\ y = 0\ (\ge).$$

Representamos gráficamente el **recinto cerrado convexo** limitado por las desigualdades, y observamos que los vértices de dicho recinto son el A, B, C, D y E.

Calculamos dichos vértices A, B, C, D y E resolviendo las ecuaciones de dos en dos.



De y = 0 e y = 9x, tenemos 0 = 9x → x = 0/9 = 0, y el vértice es A(0, 0).

De y = 0 e y = 2x/3 – 1/3, tenemos 0 = 2x/3 – 1/3 → 2x = 1 → x = 1/2 = 0’5, y el vértice es B(0’5, 0).

De y = 2x/3 - 1/3 e y = -4x + 9, tenemos 2x/3 - 1/3 = -4x + 9 → 2x - 1 = -12x + 27 → 14x = 28 → x = 28/14= = 2, con lo cual y = -4(2) + 9 = 1, y el vértice es C(2, 1).

De y = -x + 5 e y = -4x + 9, tenemos -x + 5 = -4x + 9 → 3x = 4 → x = 4/3, con lo cual y = -(4/3) + 5 = 11/3, y el vértice es D(4/3, 11/3).

De y = -x + 5 e y = 9x, tenemos -x + 5 = 9x → 10x = 5 → x = 5/10 = 0’5, con lo cual y = -(0’5) + 5 = 4’5, y el vértice es E(0’5, 4’5).
(b)
Indique razonadamente si los puntos A(2, 2) y B(1, 3’5) pertenecen a la región R.

Los puntos A(2, 2) y B(1, 2’5) pertenecen a la región R si verifican todas las inecuaciones.

Para A:
2(2) – 3(2) ≤ 1 → cierto; 4(2) + (2) ≤ 9 → falso; (2) + (2) ≤ 5 → cierto; 9(2) – (2) ≥ 0 → cierto;

$(2) \geq 0 \rightarrow$ cierto, **luego A no pertenece a R.**

Para B:
$2(1) - 3(2'5) \leq 1 \rightarrow$ cierto; $4(1) + (2'5) \leq 9 \rightarrow$ cierto; $(1) + (2'5) \leq 5 \rightarrow$ cierto; $9(1) - (2'5) \geq 0 \rightarrow$ cierto; $(2'5) \geq 0 \rightarrow$ cierto, **luego B pertenece a R.**

(c)
Obtenga los puntos de la región R donde F(x, y) = 5x - 3y alcanza el máximo y el mínimo y calcule sus correspondientes valores.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa delimitada por las restricciones, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos *F* en los puntos anteriores A(0, 0), B(0'5, 0), C(2, 1), D(4/3, 11/3) y E(0'5, 4'5). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

$F_A(0, 0) = 5(0) - 3(0) = 0$; $F_B(0'5, 0) = 5(0'5) - 3(0) = 2'5$; $\mathbf{F_C(2, 1) =} 5(2) - 3(1) \mathbf{= 7}$;
$F_D(4/3, 11/3) = 5(4/3) - 3(11/3) = -11/3 \cong -4'333$; $\mathbf{F_E(0'5, 4'5) =} 5(0'5) - 3(4'5) = \mathbf{-11}$; .

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 7** (el mayor valor en los vértices) **y se alcanza en el vértice B**, y **el mínimo absoluto de la función F en la región es -11** (el menor valor en los vértices) **y se alcanza en el vértice E.**

23_ EJERCICIO 2 – Junio (modelo 1) 2023

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcule los valores del parámetro a para que tanto A como B admitan inversa.
b) (0'75 puntos) Para a = 1, halle la matriz X que satisfaga $A \cdot X \cdot B = C$.

Solución

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(a)
Calcule los valores del parámetro a para que tanto A como B admitan inversa.

Sabemos que una matriz admite inversa si su determinantes distinto de cero.

Como $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{matrix} = (a)\cdot(a - 2)$.

Luego si $a \neq 0$ y $a \neq 2$, $|A| \neq 0$, y existe la matriz inversa $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$.

Como $|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ a & -1 \end{vmatrix} = -2 + a$.

Luego si $a \neq 2$, $|B| \neq 0$, y existe la matriz inversa $B^{-1} = \frac{1}{|B|}\cdot Adj(B^t)$.

Por tanto para $a \neq 2$ tienen matriz inversa tanto A como B.

(b)
Para a = 1, halle la matriz X que satisfaga $A \cdot X \cdot B = C$.

Para a = 1 tanto la matriz A como la B admiten inversa A^{-1} y B^{-1}.

De $A \cdot X \cdot B = C$, luego multiplicando dicha expresión por la izquierda por A^{-1} y por B^{-1} tenemos:
$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \rightarrow I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$, de donde $\mathbf{X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}}$.

Para a = 1, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera columna $= 1\cdot(1-2) = -1$; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^t) = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2+1 = -1$; $B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $Adj(B^t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \frac{1}{|B|} Adj(B^t) = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Luego $\mathbf{X = A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

BLOQUE B

23_ EJERCICIO 3 – Junio (modelo 1) 2023

Se considera la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

a) (1 punto) Halle los puntos de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos de f y su curvatura.

b) (0'5 puntos) Represente gráficamente la función f.

c) (1 punto) Calcule el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Solución

Se considera la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

(a)

Halle los puntos de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos de f y su curvatura.

Recordamos que la monotonía es el estudio de la primera derivada, y la curvatura el estudio de la segunda derivada.

Tenemos $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$; $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$; $f''(x) = 6x - 6$.

De $f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-24}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6}$, de donde $x = (6 - 2\sqrt{(3)})/6 \cong$ $\cong 0'423$ y $x = (6 + 2\sqrt{(3)})/6 \cong 1'577$, que serán los posibles extremos relativos.

Como $f'(0) = 3(0)^2 - 6(0) + 2 = 0 > 0$, **f es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en $(-\infty, +(6 - 2\sqrt{(3)})/6)$.**

Como $f'(1) = 3(1)^2 - 6(1) + 2 = -1 < 0$, **f es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en $((6-2\sqrt{(3)})/6, (6+2\sqrt{(3)})/6)$.**

Como $f'(2) = 3(2)^2 - 6(2) + 2 = 2 > 0$, **f es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en $((6+2\sqrt{(3)})/6, +\infty)$.**

Por definición **$x = (6-2\sqrt{(3)})/6$ es un máximo relativo y vale $f((6-2\sqrt{(3)})/6)$.**

Por definición **$x = (6+2\sqrt{(3)})/6$ es un mínimo relativo y vale $f((6+2\sqrt{(3)})/6)$.**

De $f''(x) = 0 \rightarrow 6x - 6 = 0$ de donde $x = 1$ que será el posible punto de inflexión.

Como $f''(0) = -6 < 0$, **f(x) es cóncava $(\cap)$ en $(-\infty, 1)$.**

Como $f''(2) = 6 > 0$, **f(x) es convexa $(\cup)$ en $(1, +\infty)$.**

Por definición **x = 1 es punto de inflexión y vale f(1) =** $(1)^3 - 3(1)^2 + 2(1)$ **= 0.**

(b)

Represente gráficamente la función f.

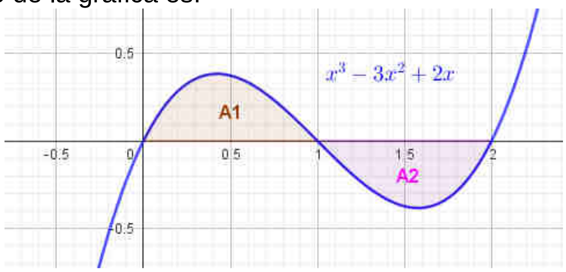
Para terminar de esbozar la gráfica veamos el comportamiento en $\pm\infty$ y el corte con los ejes.

Tenemos $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3 - 3x^2 + 2x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3) = (-\infty)^3 = -\infty$, luego en $-\infty$ la función está en $-\infty$.

Tenemos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^3 - 3x^2 + 2x) = \lim_{x\to+\infty}(x^3) = (+\infty)^3 = +\infty$, luego en $+\infty$ la función está en $+\infty$.
Para x = 0 → f(0) = 0. Punto (0, 0)

Para f(x) = 0 → $x^3 - 3x^2 + 2x = 0 = x\cdot(x^2 - 3x + 2)$, de donde x = 0 y $x^2 - 3x + 2 = 0 \to x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$, y los puntos de corte con los ejes son (0, 0), (1, 0) y (2, 0).

Con todo lo anterior un esbozo de la gráfica es:



(c)
Calcule el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Área = A1 + A2 = $\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx + \left|\int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx\right| = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 + \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_1^2\right| =$

**$= [(1^4/4 - (1)^3 + (1)^2) - (0) + |(2^4/4 - (2)^3 + (2)^2) - (1^4/4 - (1)^3 + (1)^2)|]\ u^2 = [1/4 + |0 - 1/4|]\ u^2 = (1/4 + 1/4)\ u^2 =$
$= 1/2\ u^2 = 0'5\ u^2$.**

23_ EJERCICIO 4 – Junio (modelo 1) 2023

Se desea analizar el valor de las acciones de una empresa en un día. La función v(t) nos indica el valor, en euros, de cada acción de la empresa en función del tiempo t, medido en horas, a partir de la hora de apertura del mercado. De la función v(t) se conoce que su variación instantánea es $v'(t) = t^2 - 5t + 6$, $t \in [0, 6]$
a) (0'75 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función v.
b) (0'75 puntos) Si en el momento de apertura del mercado se conoce v(0) = 10, halle la función v.
c) (0'5 puntos) Si un inversor compró 3000 de estas acciones en el instante t = 2 y posteriormente las vendió en el instante t = 4, indique a cuanto ascendió la ganancia o la perdida que obtuvo el inversor con esta gestión.
d) (0'5 puntos) ¿En qué momentos debería haber realizado este inversor las gestiones de compra y de venta para que la ganancia hubiese sido máxima? Justifique la respuesta.

Solución

Se desea analizar el valor de las acciones de una empresa en un día. La función v(t) nos indica el valor, en euros, de cada acción de la empresa en función del tiempo t, medido en horas, a partir de la hora de apertura del mercado. De la función v(t) se conoce que su variación instantánea es $v'(t) = t^2 - 5t + 6$, $t \in [0, 6]$
(a)
Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función v.

Sabemos que la monotonía es el estudio de la primera derivada v '(t).
Tenemos $v'(t) = t^2 - 5t + 6$.
De $v'(t) = 0 \to t^2 - 5t + 6 = 0 \to t = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$, de donde t = 2 y t = 3, que serán los posibles extremos relativos.
Como $v'(1) = 1^2 - 5(1) + 6 = 2 > 0$, **v es estrictamente creciente (↗) en (0, 2).**
Como $f'(2'5) = (2'5)^2 - 5(2'5) + 6 = -0'25 < 0$, **v es estrictamente decreciente (↘) en (2, 3).**
Como $f'(4) = 4^2 - 5(4) + 6 = 2 > 0$, **v es estrictamente creciente (↗) en (3, 6).**

Por definición **t = 2 es un máximo relativo y vale v(2).**
Por definición **t = 3 es un mínimo relativo y vale v(3).**

(b)
Si en el momento de apertura del mercado se conoce $v(0) = 10$, halle la función v.

Por el Teorema Fundamental del Cálculo Integral (TFCI) que nos dice " si f es continua en [a, b], entonces la función $F(x) = \int_a^x [f(t)]dt$ es derivable y su derivada es $F'(x) = f(x)$. En nuestro caso $v(t) = \int v'(t)dt$.

Tenemos $v(t) =$ $\int (t^2 - 5t + 6)dt$ **$= t^3/3 - 5\cdot t^2/2 + 6\cdot t + K$**
De $v(0) = 10$, tenemos $10 = 0 - 0 + 0 + K$ luego $K = 10$ **y la función es $v(t) = t^3/3 - 5\cdot t^2/2 + 6\cdot t + 10$.**
(c)
Si un inversor compró 3000 de estas acciones en el instante $t = 2$ y posteriormente las vendió en el instante $t = 4$, indique a cuanto ascendió la ganancia o la perdida que obtuvo el inversor con esta gestión.

Hemos visto que en $t = 2$ hay un máximo relativo.

En $t = 2$ $\rightarrow v(2) = 2^3/3 - 5\cdot(2)^2/2 + 6\cdot(2) + 10 = 44/3$, luego **gasta $3000\cdot(44/3) = 44000$ €.**
En $t = 4$ $\rightarrow v(4) = 4^3/3 - 5\cdot(4)^2/2 + 6\cdot(4) + 10 = 46/3$, luego **recibe $3000\cdot(46/3) = 46000$ €. Vemos que ha ganado 2000€.**
(d)
¿En qué momentos debería haber realizado este inversor las gestiones de compra y de venta para que la ganancia hubiese sido máxima? Justifique la respuesta.

Vamos a calcular los extremos absolutos

Sabemos que los extremos absolutos se encuentran en los extremos del intervalo, 0 y 6, y los puntos donde se anula la primera derivada v '(t), que eran 2 y 3. Entramos con estos valores, 0, 2, 3 y 6 en v(t) y el menor valor de v será el mínimo absoluto y el mayor valor de v el máximo absoluto.

Tenemos:
$v(0) =$ $0^3/3 - 5\cdot(0)^2/2 + 6\cdot(0) + 10$ **= 10 euros la acción**.
$v(2) = 2^3/3 - 5\cdot(2)^2/2 + 6\cdot(2) + 10 = 44/3 \cong 14'667$ euros la acción.
$v(3) = 3^3/3 - 5\cdot(3)^2/2 + 6\cdot(3) + 10 = 29/2 = 14'5$ euros la acción.
$v(6) =$ $6^3/3 - 5\cdot(6)^2/2 + 6\cdot(6) + 10$ **= 28 euros la acción**.

Por tanto el mínimo absoluto es euros la acción y se alcanza en $t = 0$ y el máximo absoluto es 28 euros la acción y se alcanza en $t = 6$.

Como compra 3000 acciones la máxima ganancia la obtiene comprando al abrir la sesión ($t = 0$) y vendiendo al finalizar la sesión ($t = 6$) con lo cual obtendría una ganancia de:
$28\cdot3000 - 10\cdot3000 = 54000$ euros.

BLOQUE C

23_ EJERCICIO 5 – Junio (modelo 1) 2023
Disponemos de una moneda trucada en la que la probabilidad de obtener cara, al lanzarla, es el doble de la de obtener cruz.
a) (0'5 puntos) Halle la probabilidad de que, al lanzar la moneda, se obtenga cara.
b) (0'75 puntos) Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga una cara y una cruz, sin importar el orden.
c) (0'5 puntos) Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga al menos una cara.
d) (0'75 puntos) Si al lanzar la moneda dos veces observamos que ha salido al menos una cara, halle la probabilidad de que se obtengan dos caras.

Solución

Disponemos de una moneda trucada en la que la probabilidad de obtener cara, al lanzarla, es el doble de la de obtener cruz.
(a)
Halle la probabilidad de que, al lanzar la moneda, se obtenga cara.

Sean C y X los sucesos "salir cara al lanzar una moneda" y "salir cruz al lanzar una moneda".

Sábenos que $p(C) = 2\cdot p(X)$. De $p(C) + p(X) = 1 = 2\cdot p(X) + p(X) = 3\cdot p(X) = 1 \rightarrow$ **$p(X) = 1/3$ y $p(C) = 2/3$**.

(b)
Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga una cara y una cruz, sin importar el orden.

Sabemos que al lanzar un moneda dos veces los sucesos son independientes, pues los resultados de un lanzamiento no influyen en el otro, dos sucesos son incompatibles si $p(A \cap B) = 0$, e independientes si $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Espacio Muestral de dos lanzamientos = E = {CC, CX, XC, XX}, vemos que hay 2x2 = 4 sucesos.

p(Cara y Cruz) = $p(CX) + p(XC) = 2 \cdot p(C) \cdot P(X) = 2 \cdot (2/3) \cdot (1/3)$ **= 4/9.**
(c)
Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga al menos una cara.

p(Alguna Cara) = $p(CC) + p(CX) + p(XC) = p(C) \cdot p(C) + p(\text{Cara y Cruz}) = (2/3)^2 + (4/9) = (4/9) + (4/9)$ **= 8/9.**
(d)
Si al lanzar la moneda dos veces observamos que ha salido al menos una cara, halle la probabilidad de que se obtengan dos caras.

p(Dos caras/Alguna Cara) = [p(Dos caras y Alguna Cara)] / p(Alguna Cara) =
= p(Dos caras) / p(Alguna Cara) = [(2/3)2] / (8/9) = (4/9) / (8/9) **= 1/2.**

23_ EJERCICIO 6 – Junio (modelo 1) 2023
En una base de datos de correos electrónicos se ha observado que el 20% de los correos recibidos son spam. Además, se ha observado que la palabra "*lottery*" ha aparecido en el 40% de los correos que son spam y en el 0'6% de los correos que no lo son:
a) (1'25 puntos) Halle la probabilidad de que en un correo elegido al azar en el que aparezca la palabra "*lottery*" sea spam.
b) (0'5 puntos) Halle la probabilidad de que en un correo elegido al azar en el que no aparezca la palabra "*lottery*" no sea spam.
c) (0'75 puntos) Si un correo se etiqueta como spam si que aparece la palabra "*lottery*" y como no spam si esta palabra no aparece, calcule la probabilidad de que en un correo se etiquete incorrectamente,

Solución

En una base de datos de correos electrónicos se ha observado que el 20% de los correos recibidos son spam. Además, se ha observado que la palabra "*lottery*" ha aparecido en el 40% de los correos que son spam y en el 0'6% de los correos que no lo son:
(a)
Halle la probabilidad de que en un correo elegido al azar en el que aparezca la palabra "*lottery*" sea spam.

Este problema se puede realizar utilizando una **tabla de contingencia** (tabla de doble entrada), y después utilizando la definición de probabilidad de Laplace (número de casos favorables partido por número de casos posibles).

	Tiene palabra lottery = L	No tiene palabra lottery = L^C	Total
Correo span = S	40% de 0'2 = 0'08		20% = 0'2
No correo span = S^C	0'6%de 0'8 = 0'0048		**80% = 0'8**
Total			100% = 1

Completamos la tabla de contingencia sabiendo que tanto la suma en horizontal como en vertical dan los totales. He puesto en negrita los números que he completado.

	Tiene palabra lottery = L	No tiene palabra lottery = L^C	Total
Correo span = S	40% de 0'2 = 0'08	**0'12**	20% = 0'2
No correo span = S^C	0'6%de 0'8 = 0'0048	**0'7952**	**80% = 0'8**
Total	**0'0848**	**0'9152**	100% = 1

Me piden **p(correo elegido al azar en el que aparezca la palabra "*lottery*" sea spam) = p(S/L)**.

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$p(S/L) = \frac{p(S \cap L)}{p(L)} = \mathbf{0'08/0'0848 = 50/53 \cong 0'943396}.$$

(b)
Halle la probabilidad de que en un correo elegido al azar en el que no aparezca la palabra "*lottery*" no sea spam.

Me piden **p(correo elegido al azar en el que no aparezca la palabra "*lottery*" no sea spam) = $p(S^C/L^C)$.**

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$p(S^C/L^C) = \frac{p(S^C \cap L^C)}{p(L^C)} = \mathbf{0'7952/0'9152 = 497/572 \cong 0'86888}.$$

(c)
Si un correo se etiqueta como spam si que aparece la palabra "*lottery*" y como no spam si esta palabra no aparece, calcule la probabilidad de que en un correo se etiquete incorrectamente.

Me piden **p(se etiqueta como spam si que aparece la palabra "*lottery*" y como no spam si esta palabra no aparece, probabilidad de que se etiquete incorrectamente) =**
= p(aparece la palabra "*lottery*" y no es spam ó no aparece la palabra "*lottery*" y es spam) =
= $p(L \text{ y } S^C) + p(L^C \text{ y } S) = p(L \cap S^C) + p(L^C \cap S)$.

Luego **$p(L \cap S^C) + p(L^C \cap S) =$** 0'0048 + 0'12 **= 0'1248**.

BLOQUE D

23_ EJERCICIO 7 – Junio (modelo 1) 2023

a) (1'5 puntos) Una población está dividida en cuatro estrato de 250, 300, 400 y 350 individuos. Realizado un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional se han seleccionado 20 individuos del primer estrato. Determine el tamaño se la población, el tamaño de la muestra y el número de individuos seleccionados de los tres restantes estratos.
b) En un centro de enseñanza la calificación media de los estudiantes fue de 6'4 puntos con una desviación típica de 0'7 puntos. Se seleccionó aleatoriamente una muestra de 49 estudiantes.
  b1) (0'25 puntos) Indique la distribución que sigue la media de las muestras de tamaño 49.
  b1) (1 punto) Calcule la probabilidad de que la media de las calificaciones de los estudiantes de una de esas muestras esté comprendida entre 6'3 y 6'8 puntos.

Solución

(a)
Una población está dividida en cuatro estrato de 250, 300, 400 y 350 individuos. Realizado un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional se han seleccionado 20 individuos del primer estrato. Determine el tamaño se la población, el tamaño de la muestra y el número de individuos seleccionados de los tres restantes estratos.

Sabemos que si hay "k" estratos y que el número de elementos de cada estrato es $N_1, N_2, ..., N_k$, y si $n_1, n_2, ..., n_k$ son los elementos de cada una de las muestras de los estratos, el tamaño total de la muestra es $n = n_1 + n_2, +...+ n_k$, y se calculan eligiendo los números $n_1, n_2, ..., n_k$ proporcionales a los tamaños de los estratos $N_1, N_2, ..., N_k$, es decir $\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_2}{N_2} = ... = \frac{n_k}{N_k} = \frac{n}{N}$

En nuestro caso tenemos cuatro estratos de tamaño: $N_1 = 250$, $N_2 = 300$, $N_3 = 400$ y $N_4 = 350$.
Luego $N = 250 + 300 + 400 + 350 = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 1300$.

De, seleccionar 20 individuos del primer estrato, tenemos $n_1 = 20$.
Luego tenemos: $\frac{n}{N} = \frac{n}{1300} = \frac{20}{250} = \frac{n_2}{300} = \frac{n_3}{400} = \frac{n_4}{350}$

De $\frac{n}{1300} = \frac{20}{250}$, tenemos $n = \frac{20 \cdot 1300}{250} = 104$, luego **el tamaño de la muestra total es de n = 104 individuos**.

De $\frac{104}{1300} = \frac{n_2}{300}$, tenemos $n_2 = \frac{104 \cdot 300}{1300} = 24$, luego **el tamaño de la muestra del segundo estrato es de $n_2 = 24$ individuos**.

De $\frac{104}{1300} = \frac{n_3}{400}$, tenemos $n_3 = \frac{104 \cdot 400}{1300} = 32$, luego **el tamaño de la muestra del tercer estrato es de n_3 = 32 individuos**.

De $\frac{104}{1300} = \frac{n_4}{350}$, tenemos $n_4 = \frac{104 \cdot 350}{1300} = 28$, luego **el tamaño de la muestra del cuarto estrato es de n_4 = 28 individuos**.

(b)

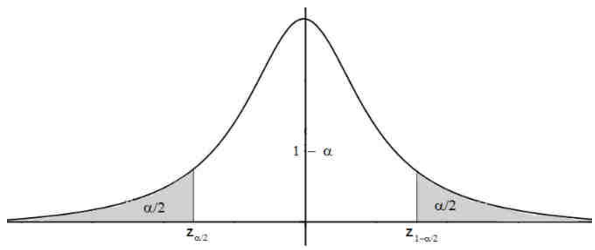
En un centro de enseñanza la calificación media de los estudiantes fue de 6'4 puntos con una desviación típica de 0'7 puntos. Se seleccionó aleatoriamente una muestra de 49 estudiantes.

(b1) Indique la distribución que sigue la media de las muestras de tamaño 49.

(b2) Calcule la probabilidad de que la media de las calificaciones de los estudiantes de una de esas muestras esté comprendida entre 6'3 y 6'8 puntos.

(b1)

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* **MEDIA** MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. En nuestro caso $\overline{X} \to N(6'4, \frac{0'7}{\sqrt{49}})$ $\to$ N(6'4 , 0'1)



(b2) Calcule la probabilidad de que la media de las calificaciones de los estudiantes de una de esas muestras esté comprendida entre 6'3 y 6'8 puntos.

Me piden $p\left(6'3 \le \overline{X} \le 6'8\right)$ = {tipificamos} = $p\left(\frac{6'3 - 6'4}{0'1} \le Z \le \frac{6'8 - 6'4}{0'1}\right)$ = p(-1 ≤ Z ≤ 4) =

= p(Z ≤ 4) - p(Z ≤ -1) = {suceso contrario} = p(Z ≤ 4) - [1 - p(Z ≤ 1)] = 0'99997 - (1 - 0'8413) **= 0'84127.**

23_ EJERCICIO 8 – Junio (modelo 1) 2023

Se desea estimar la proporción de donantes de sangre en una universidad. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 400 personas de esa universidad, resultando que 64 son donantes de sangre.

a) (1'25 puntos) Calcule un intervalo de confianza, con un nivel del 98% para estimar la proporción poblacional de donantes de sangre.

b) (1'25 puntos) Si el nivel de confianza es del 95%, calcule el error cometido. Razone si este error será mayor o menor al disminuir el nivel de confianza.

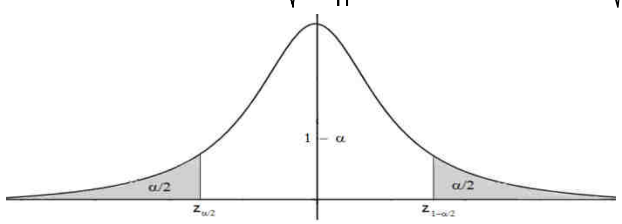
Solución

Se desea estimar la proporción de donantes de sangre en una universidad. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 400 personas de esa universidad, resultando que 64 son donantes de sangre.

(a)

Calcule un intervalo de confianza, con un nivel del 98% para estimar la proporción poblacional de donantes de sangre.

Sabemos que para la proporción poblacional **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$, sigue una N($\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$), y generalmente escribimos $\hat{p} \approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}})$ o $\hat{p} \to N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción es:

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = (a, b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que en la proporción es $\hat{p} = (a + b)/2$, el error máximo de la estimación es E =

$= z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, para el intervalo de la proporción. Pero la amplitud del intervalo es b -a = $2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ =

= 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} =$

$= \frac{2\cdot(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{(b-a)^2}$.

Datos del problema: n = 400, $\hat{p} = \frac{64}{400}$ = 0’16, $\hat{q} = 1 - \hat{p}$ = 1 - 0’16 = 0’84, nivel de confianza = 98% = 0’98 = = 1 - α, de donde α = 1 - 0’98 = 0’02, con la cual $\alpha/2$ = 0’02/2 = 0’01.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0’01 = 0’99, mirando en las tablas de la N(0,1) la probabilidad 0’99 vemos que no viene, y la más próxima es 0’9901 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2’33, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\mathbf{I.C.(p)} = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(0'16 - 2'33\cdot\sqrt{\frac{0'16\cdot 0'84}{400}}; 0'16 + 2'33\cdot\sqrt{\frac{0'16\cdot 0'84}{400}}\right) = $$

= (0’11792; 0’20271)

(b)

Si el nivel de confianza es del 95%, calcule el error cometido. Razone si este error será mayor o menor al disminuir el nivel de confianza.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 0’16, $\hat{q}$ = 0’84, nivel de confianza = 95% = 0’95 = 1 - α, de donde α = 1 - 0’95 = = 0’05, con la cual $\alpha/2$ = 0’05/2 = 0’025.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0’025 = 0’975, mirando en las tablas de la N(0,1) la probabilidad 0’975 vemos que si viene, y corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1’96.

Tenemos que el error es E $\le z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 1'96\cdot\sqrt{\frac{0'16\cdot 0'84}{400}}$ = **0’0359**.

Vemos que el error aumenta o disminuye según el valor de $z_{1-\alpha/2}$. Hemos visto que al 95%, $z_{1-\alpha/2}$ = 1’96 y que al 98%, $z_{1-\alpha/2}$ = 2’33, **por tanto a medida que aumenta el nivel de confianza aumenta el error**.