

Prova de batxillerat per a l'accés a la Universitat (PBAU)

Matemàtiques II

Versió en català

Instruccions generals

1. Emplenau la caràtula amb el número del document d'identitat, nom i cognoms.
2. **ÉS IMPORTANT** que marqueu correctament totes les caselles corresponents al document d'identitat, codi de matèria i opció. La marca ha de quedar com aquesta:

Fixau-vos bé que marcau correctament la fila i la columna corresponents al número que heu de marcar. Un error freqüent és marcar l'1 a la fila 0. Després d'emplenar les caselles del document d'identitat i el codi d'examen, revisau que les heu marcades correctament.

Instruccions per marcar el document d'identitat al full de respostes

	Document	Instrucció								
1	DNI / NIE	Heu de marcar la part numèrica del document. Si el document té menys de 8 dígits numèrics, mirau el punt 3 d'aquesta taula.								
2	Identificadors de més de 8 dígits numèrics	Heu de marcar els primers 8 dígits numèrics del document començant per l'esquerra. Exemple d'identificador: 800A12B7457 <table border="1" style="display: inline-table; margin-left: 20px;"><tr><td>8</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>7</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>	8	0	0	1	2	7	4	5
8	0	0	1	2	7	4	5			
3	Identificadors de menys de 8 dígits numèrics	Per exemple, si el document té 6 dígits numèrics, heu de marcar 2 zeros començant per l'esquerra i després marcar-ne la part numèrica. Exemple d'identificador: 81A2B745 <table border="1" style="display: inline-table; margin-left: 20px;"><tr><td>0</td><td>0</td><td>8</td><td>1</td><td>2</td><td>7</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>	0	0	8	1	2	7	4	5
0	0	8	1	2	7	4	5			

3. Indicau a la pàgina 1 el nom de la matèria i marcau-ne el codi, tal com s'indica a la figura:

Codi de la matèria:

221

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
1	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

4. Independentment de les preguntes que contesteu, heu de marcar obligatòriament l'opció A, tal com s'indica a la imatge:

Opció / Opción: A

5. Començau a respondre l'examen per la pàgina 2, seguint la numeració i no heu d'escriure fora dels marges superior (per damunt del codi de barres) i inferior (després del peu de pàgina).
6. Si acabau la prova abans que expiri el temps assignat, heu d'aixecar el braç per esperar instruccions.
7. No heu de llevar la grapa del full de respostes.

Model 1

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades.

Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1. Considerau les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 3\lambda & 6 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculeu el determinant de la matriu A . (1 punt)
 - (b) En funció del paràmetre λ , calculeu el rang de la matriu A . (3 punts)
 - (c) Per al valor de $\lambda = 1$, calculeu la matriu inversa de A , A^{-1} . (3 punts)
 - (d) Per al valor de $\lambda = 1$, resolcu l'equació matricial $XA = B$. (3 punts)
2. Durant un any, certa empresa ven 21000 vehicles de tres models A , B i C , al preu de 10000, 15000 i 20000 euros, respectivament. El total de les vendes és de 332 milions d'euros. S'ha observat que també s'han venut 21000 vehicles comptant només els del model B i λ vegades els del model A .
- (a) Plantejau un sistema d'equacions amb les condicions del problema, en funció del nombre de vehicles venuts de cada model. (3 punts)
 - (b) Calculeu el nombre de vehicles venuts de cada model, suposant $\lambda = 3$. (3 punts)
 - (c) Determineu si existeix algun valor del paràmetre λ per al qual l'anterior situació no es pugui donar. (4 punts)
3. Donades les funcions $f(x) = x^2 - 4x$ i $g(x) = 4 - 4x$.
- (a) Representau-les gràficament en un mateix sistema de coordenades. (5 punts)
 - (b) Calculeu els punts de tall d'ambdues gràfiques. (2 punts)
 - (c) Calculeu l'àrea del recinte limitat per les gràfiques d'ambdues funcions. (3 punts)



4. Sigui la funció $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$.
- (a) Calculeu el domini i els punts de tall de la gràfica de la funció amb els eixos. (2 punts)
 - (b) Calculeu la derivada de la funció i obteniu els intervals de creixement i decreixement. (2 punts)
 - (c) Comproveu que $f(-1) = f(1)$ i que $f'(x)$ no és mai zero a l'interval $[-1, 1]$. Contradiu aquest fet el teorema de Rolle? (3 punts)
 - (d) Feu un esbós de la gràfica de la funció $y = f(x)$. (3 punts)
5. Sigui a un paràmetre real. Considerau el pla $\pi \equiv 3x - 2y - z = 4$, el punt $P(1, 1, 0)$ i la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 0, \\ x - az = 1. \end{cases}$$

En cada cas, si existeix, obteniu el valor del paràmetre a per al qual:

- (a) el punt P pertany a la recta r . (1 punt)
 - (b) la recta r i el pla π es tallen en un únic punt. (3 punts)
 - (c) la recta r està continguda en el pla π . (3 punts)
 - (d) la recta r és perpendicular al pla π . (3 punts)
6. Donats els punts $A(1, 1, 1)$, $B(0, 0, -2)$, $C(2, -1, 0)$, $D(-1, 2, -1)$ i $E(0, 0, 0)$.
- (a) Comproveu que els punts A , B i C determinen un únic pla, π . (2 punts)
 - (b) Esbrinau si el triangle de vèrtexs A , B i C és rectangle en el vèrtex A . (3 punts)
 - (c) Trobau l'angle que forma la recta que passa pels punts A i D amb el pla π . (3 punts)
 - (d) Calculeu el volum del tetraedre definit pels vectors \vec{AB} , \vec{AC} i \vec{AD} . (2 punts)
7. Una prova diagnòstica d'una malaltia dona resultat negatiu el 5% de les vegades que s'aplica a un individu que la pateix i dona positiu el 10% de les vegades que s'aplica a un individu que no la pateix. Les estadístiques mostren que la dita malaltia afecta 50 de cada 10000 persones. Si una persona escollida a l'atzar se sotmet a la prova diagnòstica, calculeu les probabilitats següents:
- (a) Que un individu no pateixi la malaltia. (1 punt)
 - (b) Que la prova doni resultat positiu. (3 punts)
 - (c) Que la persona no pateixi la malaltia, si el resultat de la prova és negatiu. (3 punts)
 - (d) Que el resultat de la prova sigui erroni. (3 punts)



8. Es tenen tres urnes A , B i C . L'urna A conté 4 bolles vermelles i 2 bolles negres. L'urna B conté 3 bolles vermelles i 3 bolles negres. L'urna C conté 6 bolles negres. S'escull una urna a l'atzar i s'extreuen dues bolles de manera consecutiva i sense reemplaçament.
- (a) Calculau la probabilitat que la primera bolla extreta sigui vermella. (3 punts)
 - (b) Calculau la probabilitat que la primera bolla extreta sigui vermella i la segona sigui negra. (3 punts)
 - (c) Sabent que la primera bolla extreta és vermella, calculau la probabilitat que la segona sigui negra. (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

 Taula de la distribució normal $N(0, 1)$