

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials

Model 2

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul. Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1 (a) Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ calculeu, si és possible, la seva matriu inversa, A^{-1} . (4 punts)

(b) Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ calculeu la matriu M perquè es compleixi l'equació matricial $A \cdot M = 2I$, on I és la matriu identitat $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (6 punts)

2 (a) Representau gràficament, assenyalant els vèrtexs, així com l'equació que correspon a cadascuna de les rectes que la delimiten, i indicant si és una regió fitada del plànol o no, el conjunt de punts que satisfan les inequacions lineals següents: (5 punts)

$$x + 2y \leq 12, \quad (1)$$

$$2x + y \geq 4, \quad (2)$$

$$x - 2y \leq 6, \quad (3)$$

$$x - y \geq 0, \quad (4)$$

$$x \leq 8. \quad (5)$$

(b) Indica la posició dels punts $P = (1, 2)$ i $Q = (5, 1)$ en relació amb la regió determinada a l'apartat a). En cas que el punt sigui exterior indica, comprovant-ho algebraicament, quina o quines de les inequacions no compleix. (3 punts)

(c) Per a la regió representada a l'apartat a) determina en quins punts agafa el valor màxim la funció $g(x, y) = 2x - 3y$. (2 punts)

3 El rendiment (mesurat de 0 a 10) d'un producte en funció del temps d'ús (x en anys) ve donat per la funció següent

$$R(x) = 7.5 + \frac{5x}{1 + x^2}, \quad x \geq 0.$$

(a) Hi ha intervals de temps que el rendiment creix? I que decreix? Quins són? (6 punts)

(b) En quin punt s'arriba al rendiment màxim? Quant val? (2 punts)

(c) Per molt que passi el temps, pot arribar a ser el rendiment inferior al que el producte tenia quan era nou? (2 punts)

4 En una classe infantil hi ha 6 nines i 10 nins. Si s'escull 3 alumnes a l'atzar, calculau la probabilitat de:

(a) Seleccionar 3 nins. (2 punts)

(b) Seleccionar 1 nin i 2 nines. (3 punts)

(c) Seleccionar 2 nins i 1 nina. (2 punts)

(d) Seleccionar, almenys, 1 nin. (3 punts)

OPCIÓ B

1 Considerau el següent sistema d'equacions en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ k & 1 & -3 \\ 1 & k & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Es demana:

(a) Per a quins valors del paràmetre k és el sistema compatible determinat? (5 punts)

(b) Té solució el sistema quan $k = -9$? Explicau-ho. (3 punts)

(c) Resoldre'l, justificant si és o no possible, per a $k = 0$. (2 punts)

2 Una empresa té dos centres de producció, C1 i C2, en els quals fabrica tres tipus d'articles, A1, A2 i A3. Aquesta empresa ha de fabricar diàriament un mínim de 360 unitats de l'article A1, 320 de l'A2 i 180 de l'A3. La producció, per hora, en cada centre ve donada en la taula següent:

Producció	A1	A2	A3
A C1	25	30	10
A C2	30	20	18

Si cada hora de funcionament costa 480 € a C1 i 600 € a C2; quantes hores ha de funcionar cada centre perquè produint, almenys, el nombre mínim necessari d'unitats indicades de cada article, es redueixin al mínim els costos de producció? Quin és el cost mínim? S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, representar gràficament el seu conjunt factible de solucions, determinant i dibuixant el seus vèrtexs, i resoldre'l. (10 punts)

3 El perímetre toràcic dels individus adults (homes) d'una determinada població es distribueix segons una llei normal de mitjana 90 i desviació típica 6, en cm.

(a) Com es distribueixen les mitjanes de les mostres de grandària 81 extrems d'aquesta població? (2 punts)

(b) Quina és la probabilitat que una d'aquestes mitjanes sigui més gran que 88? (4 punts)

(c) I que sigui més gran que 91 cm? (4 punts)

4 En una certa població, un 20% dels treballadors treballa en l'agricultura, un 25% en la indústria i la resta en el sector serveis. Un 63% dels que treballen en l'agricultura són més grans de 45 anys, sent aquest percentatge del 38% i el 44% en els altres dos sectors, respectivament.

- (a) Selecció d'un treballador a l'atzar, quina probabilitat hi ha que tingui menys de 45 anys? (6 punts)
- (b) Si sabem que un treballador és més jove de 45 anys, quina probabilitat hi ha que procedeixi de cadascun dels sectors, industrial i serveis? (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 2: Taula de la distribució normal $N(0, 1)$.