



Model I

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul. Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1 El vaixell de Dénia a Eivissa porta automòbils i camions a la bodega. Cada camió ocupa quatre places d'automòbil. La superfície total de la bodega permet situar-hi fins a 200 automòbils. Cada automòbil pesa 1000 kg, i cada camió, 9000 kg. El pes total permès per a la càrrega és de 300 000 kg. La companyia cobra 50 euros per cada automòbil i 300 euros per cada camió.

- Plantejau la maximització del benefici de la companyia com un problema de programació lineal. (4 punts)
- Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. (4 punts)
- Calculau el nombre de cotxes i camions que s'han de carregar per tal d'obtenir un benefici màxim. Determinau també aquest benefici màxim. (2 punts)

2 Donades les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

- Calculau A^2 . (2 punts)
- Trobau a, b, c tals que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (8 punts)

3 En una botiga de fruita hem comprat pomes a 0.5 euros cadascuna, alvocats a 1 euro i pinyes a 1.5 euros la peça. En arribar a la caixa ens adonam que portam 70 peces de fruita, el cost total de les quals és de 68 euros. També observam que si les pomes que portam fossin alvocats i els alvocats fossin pomes, la compra ens sortiria 4 euros més barata.

- Identificau les variables i interpretau l'enunciat com un conjunt d'equacions lineals. (5 punts)
- Determinau el nombre de peces de cada fruita que hem comprat. (5 punts)

4 Considerem la funció definida a trossos següent

$$f(x) = \begin{cases} -4x + a & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - 5 & \text{si } -2 < x < 1 \\ -7x + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- Calculau els valors de a perquè $f(x)$ sigui contínua. (3 punts)

- b) És $f(x)$ derivable per $a = 1$? (3 punts)
c) Per $a = 0$, determinau els intervals de creixement i decreixement de $f(x)$. (4 punts)

5 El nombre d'individus, en milions, d'una població ve determinat per la funció

$$P(t) = \frac{2 + t + t^2}{t^2 + 2t + 1},$$

on $t \geq 0$ mesura el nombre d'anys transcorreguts.

- a) Quina és la població inicial ($t=0$) i la població després de 5 anys? (2 punts)
b) A partir de quin moment la població serà inferior a un milió d'individus? (4 punts)
c) Amb el pas dels anys, cap a quin valor tendirà el nombre d'individus de la població? (4 punts)

6 Considerau la funció $f(x) = \frac{3}{x} + 8$.

- a) Trobau els punts de la gràfica en els quals la recta tangent és paral·lela a la recta $3x + 4y + 5 = 0$. (4 punts)
b) Calculau les equacions de les rectes tangents als punts trobats a l'apartat anterior. (2 punts)
c) Calculau l'àrea compresa entre la gràfica de la funció $f(x)$ i les rectes $x = 2$, $x = 4$ i $y = 0$. (4 punts)

7 En una mostra aleatòria de 256 individus s'ha obtingut una edat mitjana de 17.4 anys. Se sap que la desviació típica de la població normal de la qual procedeix aquesta mostra és de 2 anys.

- a) Calculau un interval de confiança del 95% per estimar l'edat mitjana de la població. (5 punts)
b) Calculau la mida mínima de la mostra que s'ha de prendre perquè en estimar l'edat mitjana d'aquesta població amb un nivell de confiança del 92%, l'error comès sigui inferior a 0.5 anys. (5 punts)

8 En una determinada població resideixen 5000 persones en el centre i 10000 a la perifèria. Se sap que el 95% dels residents en el centre i que el 20% dels que viuen a la perifèria opina que l'ajuntament hauria de restringir l'accés de vehicles privats al centre urbà. Es tria a l'atzar un resident de la població.

- a) Quina és la probabilitat que estigui a favor de restringir l'accés de vehicles privats al centre de la ciutat? (3 punts)
b) Quina és la probabilitat que resideixi en el centre i estigui a favor de la restricció d'accés? (3 punts)
c) Si la persona triada opina que s'hauria de restringir l'accés, quina és la probabilitat que resideixi en el centre de la ciutat? (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0, 1)$.