



Model III

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul. Es permet utilitzar calculadora científica bàsica. No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1 Donat el sistema d'equacions en funció del paràmetre a :

$$x + y + z = 5$$

$$5x + ay - z = 11$$

$$3x - y + az = 2.$$

- a) Discutiu per a quins valors de a el sistema té solució i quantes en té en cada cas. (6 punts)
- b) Trobau la solució del sistema per $a = 2$. (4 punts)

2 Un ajuntament concedeix llicències per a la construcció d'una urbanització de, com a màxim, 120 habitatges, de dos tipus, A i B. Per això l'empresa constructora disposa d'un capital màxim de 15 milions d'euros, essent el cost de construcció de l'habitatge de tipus A de 100000 euros i el de tipus B de 300000 euros. El benefici obtingut per la venda d'un habitatge de tipus A és de 20000 euros i per la venda d'un de tipus B és de 40000 euros.

- a) Plantejau la maximització del benefici de la companyia com un problema de programació lineal. (4 punts)
- b) Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. (4 punts)
- c) Calculeu el nombre d'habitatges de cada tipus que s'han de construir per tal d'obtenir un benefici màxim. Determineu també aquest benefici màxim. (2 punts)

3 Considerau les següents matrius:

$$M = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3k \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ k & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) Raonau si és possible calcular els productes $M \cdot N$ i M^2 . En el cas que ho sigui, calculeu-los. (2 punts)
- b) Estudieu per a quins valors de k és $M \cdot N$ invertible. (3 punts)
- c) Calculeu la inversa de $M \cdot N$ per a $k = 1$. (2 punts)
- d) Per a $k = 1$, trobau la matriu X que compleix $(M \cdot N) \cdot X = B$, on $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (3 punts)

4 Donada la funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + x$, definida per a tot $x \in \mathbb{R}$.

- a) Trobau a i b sabent que $f(x)$ té un punt crític en el punt $x = 1$ i la seva gràfica passa pel punt $(3, 0)$. (5 punts)
- b) Estudiau el creixement i decreixement de $f(x)$ per $a = 3$ i $b = 3$. (5 punts)

5 El benefici $B(x)$, en euros, que obté una empresa per la venda de x unitats d'un determinat producte es representa per la funció:

$$B(x) = -x^2 + 300x - 16100 \quad \text{per a } x \geq 0.$$

- a) Calculeu el benefici de vendre'n 110 unitats. (1 punt)
- b) Representau gràficament la funció. (3 punts)
- c) Quantes unitats ha de vendre per tal que el benefici sigui màxim? Quin és aquest benefici màxim? (3 punts)
- d) Quantes unitats ha de vendre per tenir un benefici igual a 3900 euros? I per tenir un benefici superior a 3900 euros? (3 punts)

6 Considerem la funció a trossos següent

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ e^{ax} + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Calculeu els valors de a perquè f sigui contínua i derivable. (5 punts)
- b) Per a $a = 4$ calculeu l'àrea compresa entre la gràfica de $f(x)$ i les rectes $x = 1$, $x = 2$ i $y = 0$. (5 punts)

7 El pes de les persones d'un col·legi major segueix una llei normal de mitjana 70 kg i desviació típica 15 kg. Si escollim a l'atzar una persona del col·legi, calculeu la probabilitat dels següents esdeveniments:

- a) El seu pes sigui superior a 80 kg. (3 punts)
- b) El seu pes sigui inferior a 50 kg. (3 punts)
- c) Pesi entre 60 i 120 kg. (4 punts)

8 De dos esdeveniments d'un mateix espai mostral se sap que

$$p(A \cap B) = 0.1 \quad p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.6 \quad P(A/B) = 0.5,$$

\bar{A} i \bar{B} denoten els esdeveniments complementaris de A i B respectivament.

- a) Calculeu $p(B)$. (3 punts)
- b) Calculeu $p(A \cup B)$. (3 punts)
- c) Són els esdeveniments A i B independents? Raonau la resposta. (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0, 1)$.