

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

Calificación total máxima: 10 puntos.

Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix},$$

- a) (1 punto) Calcular el rango de A en función de los valores de a .
- b) (1 punto) En el caso $a = 2$, discutir el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ en función de los valores de b , y resolverlo cuando sea posible.
- c) (1 punto) En el caso $a = 1$, resolver el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

- a) (1'5 puntos) Hallar el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las rectas

$$r_1 \equiv x = y = z, \quad r_2 \equiv \begin{cases} y = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad r_3 \equiv \begin{cases} x = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

con el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24$.

- b) (1'5 puntos) Hallar la recta s que corta perpendicularmente a las rectas

$$r_4 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-2}, \quad r_5 \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}.$$

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

- a) (1 punto) Calcular la integral $\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2} dx$.
- b) (1 punto) Hallar los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = \sqrt{12-3x^2}$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

- a) (1 punto) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}.$$

- b) (1 punto) Demostrar que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ sólo tiene una raíz real, cualquiera que sea el número m . Justificar la respuesta indicando qué teoremas se usan.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función

$$f(x) = \frac{ax^4 + 1}{x^3}$$

se pide:

- (1 punto) Determinar el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en $x = 1$. Para ese valor de a , obtener los otros puntos en que f tiene un extremo relativo.
- (1 punto) Obtener las asíntotas de la gráfica de $y = f(x)$ para $a = 1$.
- (1 punto) Esbozar la gráfica de la función para $a = 1$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.

- (2 puntos) Discutir el sistema de ecuaciones $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m-1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m+2 \end{pmatrix},$$

según los valores de m .

- (1 punto) Resolver el sistema en los casos $m = 0$ y $m = 1$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + y - 2z = 1, \quad \pi_2 \equiv x - y + 2z = 1,$$

se pide:

- (0'5 puntos) Estudiar su posición relativa.
- (1'5 puntos) En caso de que los planos sean paralelos hallar la distancia entre ellos; en caso de que se corten, hallar un punto y un vector de dirección de la recta que determinan.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.

- (0'75 puntos) Hallar la ecuación del plano π_1 que pasa por los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.
- (0'75 puntos) Hallar la ecuación del plano π_2 que contiene al punto $P(1, 2, 3)$ y es perpendicular al vector $\vec{v}(-2, 1, 1)$.
- (0'5 puntos) Hallar el volumen del tetraedro de vértices A , B , C y P .