INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea A una matriz de tamaño 3×4 tal que sus dos primeras filas son $(1,1,1,1)$ y $(1,2,3,4)$, y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz A que verifique la condición pedida, **justificándolo apropiadamente**:

a) (0.5 puntos) La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.
b) (0.5 puntos) Las tres filas de A son linealmente independientes.
c) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.
d) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.
e) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x < 1, x \neq -1 \\ \\ \dfrac{x^2+1}{4x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular $f(0)$ y $(f \circ f)(0)$.
b) (1.25 puntos) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.
c) (0.75 puntos) Estudiar sus asíntotas.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto $P(3,3,0)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{0}$, se pide:

a) (0.75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.
b) (1 punto) Calcular el punto simétrico de P respecto de r.
c) (0.75 puntos) Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recto en A.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 negras, la urna B contiene 3 bolas de cada color y la urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.
b) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra.
c) (0.5 puntos) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1 puntos) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A.

b) (0.5 puntos) Calcular la matriz $C = A^2 - 2\,I$.

c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz $D = ABB^t$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La potencia generada por una pila viene dada por la expresión $P(t) = 25\,t\,e^{-t^2/4}$, donde $t > 0$ es el tiempo de funcionamiento.

a) (0.5 puntos) Calcular hacia qué valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.

b) (0.75 puntos) Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.

c) (1.25 puntos) La energía total generada por la pila hasta el instante t, $E(t)$, se relaciona con la potencia mediante $E'(t) = P(t)$, con $E(0) = 0$. Calcular la energía producida por la pila entre el instante $t = 0$ y el instante $t = 2$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Del paralelogramo $ABCD$, se conocen los vértices consecutivos $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 0)$ y $C(4, 3, -2)$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.

c) (0.5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes X, Y. Sabemos que $P(X) = 0.4$ y que $P(X \cap \overline{Y}) = 0.08$ (donde $\overline{Y}$ es el suceso complementario de Y). Se pide:

a) (1 punto) Calcular $P(Y)$.

b) (0.5 puntos) Calcular $P(X \cup Y)$.

c) (1 punto) Si X es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede X, y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A.1.

En cada apartado, por dar el ejemplo 0.25 puntos; por la justificación de que cada ejemplo cumple el enunciado, 0.25 puntos.

Estándares evaluables: Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes. Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos.

A.2.

a) Por cada valor obtenido: 0.25 puntos.
b) Por el estudio de la continuidad: 0.5 puntos. Por el estudio de la derivabilidad: 0.5 puntos. Por caracterizar el extremo: 0.25 puntos.
c) Por cada asíntota: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como teoremas relacionados, a la resolución de problemas.

A.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Encontrar una solución correcta: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades.

A.4.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes.

B.1.

!a Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Determina las condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado. Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente.

B.2.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Cálculo de límite: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Cálculo del instante: 0.25 puntos. Cálculo del máximo: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Cálculo de la primitiva: 0.5 puntos. Aplicación de la regla de Barrow: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como teoremas relacionados, a la resolucion de problemas. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.

B.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Si se determina el vértice D: 0.5 puntos (repartidos entre planteamiento: 0.25 y resultado: 0.25). Si se determina el área: 0.5 puntos (repartidos entre planteamiento: 0.25 y resultado: 0.25).
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Realiza operaciones elementales con vectores, manejando correctamente los conceptos de base y de dependencia e independencia lineal. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos. Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas.

B.4.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) 0.5 puntos por identificar la binomial; 0.5 puntos por el resultado.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral. Identifica fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial, obtiene sus parámetros y calcula su media y desviación típica. Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora.

MATEMÁTICAS II–SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

A.1.

a) Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ **b)** Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

c) Sirve el ejemplo de b) **d)** Sirve el ejemplo de a)

e) Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

A.2.

a) Evaluando $\boxed{f(0) = 1}$ y $\boxed{(f \circ f)(0) = f(f(0)) = f(1) = 1/2}$.

b) Dado que $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2+1}{4x} = f(1) = \dfrac{1}{2}$, $\boxed{f(x) \text{ continua en } x = 1}$.

Dado que $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-1}{(x+1)^2} = \dfrac{-1}{4} \neq \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2-1}{4x^2} = 0$, $f(x)$ $\boxed{\text{no derivable en } x = 1}$. En $x = 1$, $f(x)$ pasa de decreciente a creciente luego en $\boxed{x = 1 \text{ hay un mínimo relativo}}$.

c) $\boxed{\text{Asíntota horizontal y=0 si } x \to -\infty}$, $\boxed{\text{asíntota vertical } x = -1}$ y $\boxed{\text{asíntota oblicua } y = \dfrac{x}{4} \text{ si } x \to \infty}$.

A.3.

a) La recta r pasa por el punto $C(2, 0, -1)$ y tiene vector director $\vec{v} = (-1, 1, 0)$. El plano que nos piden pasa por el punto C y tiene vectores directores $\vec{v}$ y $\overrightarrow{CP} = (1, 3, 1)$. Su ecuación será $x + y - 4z - 6 = 0$.

b) La proyección O del punto P sobre la recta r se halla intersecando r con el plano de vector normal $\vec{v}$ que pasa por P. Dicho plano es $-x + y = 0$, y al cortarlo con

$$r : \begin{cases} x + y = 2 \\ \quad z = -1 \end{cases}$$

obtenemos el punto $O(1, 1, -1)$. Si P' es el simétrico a P respecto de r, se tiene $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{OP'}$, es decir $P' = 2O - P = (2, 2, -2) - (3, 3, 0) = (-1, -1, -2)$.

c) Si tomamos $A = O = (1, 1, -1)$, tendremos que el triángulo ABP será rectángulo en A, y su altura será $|\overrightarrow{AP}| = |(2, 2, 1)| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = 3$. Por tanto, basta tomar como B un punto de r a distancia $\sqrt{2}$ de A. Como $|\vec{v}| = |(1, -1, 0)| = \sqrt{2}$, una posible solución sería $B = A + \vec{v} = (0, 2, -1)$ (la otra solución sería $B' = A - \vec{v} = (2, 0, -1)$).

A.4.

a)

$R \equiv$ primera bola roja.	$P(A) = 1/3$	$P(R\|A) = 2/3$
$N \equiv$ primera bola negra.	$P(B) = 1/3$	$P(R\|B) = 1/2$
$A, B, C \equiv$ urna.	$P(C) = 1/3$	$P(R\|C) = 0$

$$P(R) = P(R|A) \cdot P(A) + P(R|B) \cdot P(B) + P(R|C) \cdot P(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{18}.$$

b) Análogamente al apartado anterior, $P(RN|A) = (4/6)(2/5) = 4/15$, $P(RN|B) = (3/6)(3/5) = 3/10$, $P(RN|C) = 0$, de modo que

$$P(RN) = P(RN|A) \cdot P(A) + P(RN|B) \cdot P(B) + P(RN|C) \cdot P(C) = \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{17}{90}.$$

c) Basta escribir $P(N_2|R_1) = \dfrac{P(RN)}{P(R)} = \dfrac{17/90}{7/18} = \dfrac{17}{35}$.

También puede razonarse de la manera siguiente: Dado que la primera bola es roja, la urna elegida no es la C. Las probabilidades respectivas de que se trate de la urna A o de la B se obtienen mediante el teorema de Bayes:

$$P(A|R) = \frac{P(R|A) \cdot P(A)}{P(R)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{7}{18}} = \frac{4}{7}; \; P(B|R) = \frac{P(R|B) \cdot P(B)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{7}{18}} = \frac{3}{7}$$

Si la urna elegida fue la A, quedan 3 rojas y 2 negras. Si fue la B quedan 2 rojas y 3 negras. La probabilidad de que la segunda sea negra (sabiendo que la primera fue roja) es, por tanto, $P(N_2|R_1) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{4}{7} + \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{3}{7} = \dfrac{17}{35}$.

B.1.

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $|ABB^t| = |A||BB^t|$

$BB^t = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to |BB^t| = 0 \to |ABB^t| = 1 \cdot 0 = 0$

B.2.

a) Dado que $\lim_{x\to\infty} 25\,t\,e^{-t^2/4} = 0$ (por ejemplo, aplicando la Regla de L'Hôpital), $\boxed{\text{la potencia tiende a 0}}$.

b) Como $P'(t) = \dfrac{25}{2}(2-t^2)\,e^{-t^2/4}$, $P(t)$ presenta un extremo en $\boxed{t=\sqrt{2}}$ pasando de creciente a decreciente luego es un máximo relativo. Así $\boxed{P_{max} = P(\sqrt{2}) = 25\sqrt{2}\,e^{-1/2} \approx 21.44}$.

c) $E(2) = \displaystyle\int_0^2 P(t)\,dt = \left[-50\,e^{-t^2/4}\right]_0^2 = \boxed{50 - 50/e \approx 31.61}$.

B.3.

a) El punto medio de AC es $M_{AC}(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2})$. $\overrightarrow{AC}(3,3,-1)$ y $\overrightarrow{BC}(2,2,-2)$ y por tanto el vector director de la recta buscada es $\overrightarrow{d_r} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC} = (-4,4,0)$ que es paralelo al vector $(-1,1,0)$. La ecuación vectorial de la recta r buscada es: $r : (x,y,z) = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2}) + \lambda(-1,1,0) \Rightarrow$ las ecuaciones implícitas de r son:$\begin{cases} x+y-4=0 \\ 2z+3=0 \end{cases}$.

b) El vértice D es el simétrico de B con respecto al punto medio de $AC \Rightarrow (\frac{x+2}{2}, \frac{y+1}{2}, \frac{z}{2}) = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2})$ y por consiguiente, el vértice D es $D = A + \overrightarrow{BC} = (3,2,-3)$. El área del paralelogramo es: $A = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

c) $\cos(\alpha) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{5}{\sqrt{57}}$.

B.4.

a) Al ser X e Y independientes, tenemos que

$$0.08 = P(X \cap \overline{Y}) = P(X) - P(X \cap Y) = P(X) - P(X)\,P(Y) = 0.4(1 - P(Y)) \Rightarrow 1 - P(Y) = 0.2 \Rightarrow P(Y) = 0.8.$$

b) $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) = P(X) + P(Y) - P(X)\,P(Y) = 0.8 + 0.4 - 0.32 = 0.88.$

c) Se trata de 8 pruebas de Bernoulli con probabilidad de éxito $p = P(\overline{X}) = 1 - 0.4 = 0.6$, y queremos hallar la probabilidad de tener al menos 2 éxitos (llamamos n al número de éxitos):

$$P(n \geq 2) = 1 - P(n=0) - P(n=1) = 1 - \binom{8}{0} 0.6^0 0.4^8 - \binom{8}{1} 0.6^1 0.4^7 = 0.99148032.$$