

OPCIÓN A

1.A.- Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Determinar la matriz inversa de **B**

b) Determinar una matriz **X** tal que **A = BX**

a)

$$\exists B^{-1} \Rightarrow |B| \neq 0 \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 + 1 - 3 = 3 \neq 0 \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot \text{adj}(B^t) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{adj}(B^t) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}A = B^{-1}BX \Rightarrow X = B^{-1}A \Rightarrow X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & -11 \\ -3 & 3 & 15 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{11}{3} \\ -1 & 1 & 5 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

2.A.- a) Si \mathbf{A} es una matriz tal que $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ¿cual es el valor del determinante de \mathbf{A} ?

b) Calcular un número k tal que: $\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

a)

$$|\mathbf{A}^2| = 0 \Rightarrow |\mathbf{A}^2| = |\mathbf{A}|^2 = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{A}| = 0 \Rightarrow \text{Como } |\mathbf{A}| = |\mathbf{A}| \Rightarrow |\mathbf{A}| = 0 \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = 0$$

b)

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-k & -4 \\ 1 & -1-k \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Utilizando la propiedad del a)}$$

$$\begin{vmatrix} 3-k & -4 \\ 1 & -1-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(3-k)(1+k) + 4 = 0 \Rightarrow -(3+3k-k-k^2) + 4 = 0 \Rightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 4 - 4 = 0 \Rightarrow k = \frac{2}{2} = 1$$

Comprobación

$$\begin{pmatrix} 3-k & -4 \\ 1 & -1-k \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-k & -4 \\ 1 & -1-k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3-k & -4 \\ 1 & -1-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} (3-k)^2 - 4 & -4(3-k) - 4(-1-k) \\ (3-k) + (-1-k) & -4 + (-1-k)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 9 - 6k + k^2 - 4 = 0 \Rightarrow k^2 - 6k + 5 = 0 \\ -12 + 4k + 4 + 4k = 0 \Rightarrow 8k - 8 = 0 \\ 3 - k - 1 - k = 0 \Rightarrow -2k + 2 = 0 \\ -4 + 1 + 2k + k^2 = 0 \Rightarrow k^2 + 2k - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} k^2 - 6k + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 20 = 16 > 0 \Rightarrow k = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 5 \end{cases} \\ 8k - 8 = 0 \Rightarrow k = 1 \\ -2k + 2 = 0 \Rightarrow k = 1 \end{cases} \Rightarrow k = 1 \text{ (Comprobado)}$$

$$\begin{cases} k^2 + 2k - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 + 12 = 16 > 0 \Rightarrow k = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -3 \end{cases} \end{cases}$$

3.A.- Sea el plano $p: x + 2y + 3z = 6$

a) Hallar el punto simétrico del $(0, 0, 0)$ respecto de p

b) Hallar el plano perpendicular a p que contiene el eje OZ

c) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de p con los ejes coordenados.

a) Se trazará por el punto dado una recta r perpendicular al plano p , para ello se tomará el vector director del plano y su vector generador. Se hallara el punto de corte de la recta hallada y el plano dado que nos da el punto central A del simétrico pedido P .

$$\vec{v}_\pi = (1, 2, 3) \Rightarrow r: \begin{cases} x = 0 + \lambda = \lambda \\ y = 0 + 2\lambda = 2\lambda \\ z = 0 + 3\lambda = 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda + 2 \cdot 2\lambda + 3 \cdot 3\lambda = 6 \Rightarrow 14\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{7} \Rightarrow A \begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = \frac{6}{7} \\ z = \frac{9}{7} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{3}{7} = \frac{0 + x_p}{2} \Rightarrow 7x_p = 6 \Rightarrow x_p = \frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} = \frac{0 + y_p}{2} \Rightarrow 7y_p = 12 \Rightarrow y_p = \frac{12}{7} \\ \frac{9}{7} = \frac{0 + z_p}{2} \Rightarrow 7z_p = 18 \Rightarrow z_p = \frac{18}{7} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, \frac{18}{7}\right)$$

b) Uno de los vectores directores del plano buscado es el de p , el otro es el del eje OZ y el último el vector formado por el punto genérico y el origen de coordenadas que es por donde pasa el eje OZ

$$\begin{cases} \vec{v}_\pi = (1, 2, 3) \\ \vec{v}_{OZ} = (0, 0, 1) \\ \vec{v}_{generico} = (x, y, z) - (0, 0, 0) = (x, y, z) \end{cases} \Rightarrow \sigma \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \sigma \equiv 2x - y = 0$$

Continuación del problema 3.A.-

c) Los puntos de corte, **B, C y D**, serán los del plano \mathcal{P} con los ejes **OX, OY y OZ** . Con ellos se formaran los vectores BC y BD con los que hallaremos el volumen pedido

$$\left\{ \begin{array}{l} OX \equiv \begin{cases} x = 0 + \lambda = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 6 \Rightarrow \lambda = 6 \Rightarrow B \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \Rightarrow B(6, 0, 0) \\ z = 0 \end{cases} \\ OY \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \mu \Rightarrow 0 + 2 \cdot \mu + 3 \cdot 0 = 6 \Rightarrow 2\mu = 6 \Rightarrow \mu = 3 \Rightarrow C \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \Rightarrow C(0, 3, 0) \\ z = 0 \end{cases} \\ z = 0 \end{cases} \\ OZ \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \Rightarrow 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot \alpha = 6 \Rightarrow 3 \cdot \alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow D \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \Rightarrow D(0, 0, 2) \\ z = \alpha \end{cases} \\ z = \alpha \end{cases} \end{array} \right.$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot |\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}| \cdot \overrightarrow{OD} \Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 36 = 6 u^3$$

4.A.- Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada $f'(x) = (x - 4)^2(x^2 - 8x + 7)$

a) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f

b) Hallar los máximos y mínimos relativos de f

c) ¿Es el punto $x = 4$ un punto de inflexión de f ? Justificar razonadamente la respuesta

a)

$$x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow \Delta = 64 - 28 = 36 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{8+6}{2} = 7 \\ x_2 = \frac{8-6}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f'(x) = (x-1)(x-4)^2(x-7) \Rightarrow \text{Crecimiento} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow (x-1)(x-4)^2(x-7) > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x > 1 \\ (x-4)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x-7 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x > 7 \end{cases}$$

	$-\infty$	1	7	∞
$x > 1$	-	+	+	
$x > 7$	-	-	+	
	$f'(x) > 0$		$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$

Crecimiento $\forall x \in \mathbb{R} / (x < 1) \cup (x > 7)$

Decrecimiento $\forall x \in \mathbb{R} / 1 < x < 7$

b)

En $x = 1$ hay un **máximo relativo** (De crecimiento pasa a decrecimiento)

En $x = 7$ hay un **mínimo relativo** (De decrecimiento pasa a crecimiento)

c)

$$f''(x) = (x-4)^2(x-7) + (x-1) \cdot 2 \cdot (x-4)(x-7) + (x-1)(x-4)^2$$

$$f''(x) = (x-4)[(x-4)(x-7) + 2(x-1)(x-7) + (x-1)(x-4)]$$

$$f''(4) = (4-4)[(4-4)(4-7) + 2(4-1)(4-7) + (4-1)(4-4)] = 0 \Rightarrow$$

Existe un punto de inflexión en $x = 4$

OPCIÓN B

1.B.- a) Hallar el conjunto formado por los puntos del plano $z = 0$ que distan 3 unidades del plano de ecuación $2x - y + 2z = 4$

b) Describir dicho conjunto

a)

$$\text{Los puntos del plano son de la forma } (x, y, 0) \Rightarrow 3 = \pm \frac{2x - y + 2 \cdot 0 + 4}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} \Rightarrow 3 = \pm \frac{2x - y + 4}{\sqrt{9}}$$

$$\begin{cases} 9 = 2x - y + 4 \Rightarrow 2x - y + 5 = 0 \\ 9 = -(2x - y + 4) \Rightarrow 9 = -2x + y - 4 \Rightarrow 2x - y + 13 \end{cases}$$

b)

Ambos conjuntos son rectas en el plano $z = 0$

2.B.- El plano $p \equiv 2x - 2y + z = -2$ determina un tetraedro con los tres planos coordenados. Se pide:

- Calcular la longitud de la altura del tetraedro que parte del origen
- Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a dicha altura.
- Calcular el área de la cara del tetraedro que esta contenida en el plano p .

a) Calcularemos los puntos de corte **A**, **B** y **C** con los tres ejes coordenados que generan el plano p . Hallaremos la altura como la distancia del origen al plano generado

$$\text{Con } OX \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow 2\lambda - 2 \cdot 0 + 0 = -2 \Rightarrow 2\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow A \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-1, 0, 0)$$

$$\text{Con } OY \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 0 - 2 \cdot \mu + 0 = -2 \Rightarrow -2\mu = -2 \Rightarrow \mu = 1 \Rightarrow B \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0, 1, 0)$$

$$\text{Con } OZ \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + \alpha = -2 \Rightarrow \alpha = -2 \Rightarrow C \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow C(0, 0, -2)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0, 1, 0) - (-1, 0, 0) = (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 0, -2) - (-1, 0, 0) = (1, 0, -2) \\ \overrightarrow{AG} = (x, y, z) - (-1, 0, 0) = (x+1, y, z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2(x+1) - z + 2y = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 2x - 2y + z + 2 = 0 \Rightarrow h = d_{O\pi} = \frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 0 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} u$$

b) La recta pedida r pasa por el origen y tiene como vector director el del plano p que es perpendicular a él y paralelo a la recta.

$$\vec{v}_r = \vec{v}_\pi = (2, -2, 1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 0 + 2\beta = 2\beta \\ y = 0 - 2\beta = -2\beta \\ z = 0 + \beta = \beta \end{cases}$$

c)

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{k} + 2\vec{j} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2} u^2$$

3.B.- Sea la función $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

a) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas

b) Dibujar la gráfica de la función, utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además, que **f** tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abscisas

son: $x_1 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, respectivamente.

c) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función **f**, del eje **OX**, la recta **x = 0**, y la recta **x = 2**

a)

$$f'(x) = \frac{2(x^2+x+1)^2 - 2(x^2+x+1)(2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^4} = \frac{2(x^2+x+1) - 2(2x+1)^2}{(x^2+x+1)^3} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 2x + 2 - 8x^2 - 8x - 2}{(x^2+x+1)^3} = \frac{-6x^2 - 6x}{(x^2+x+1)^3} = (-6) \frac{x^2+x}{(x^2+x+1)^3} = (-6) \frac{(x+1)x}{(x^2+x+1)^3}$$

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow \Delta = 1-4 = -3 < 0 \Rightarrow \forall x \notin \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\text{Crecimiento} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow (-6) \frac{(x+1)x}{(x^2+x+1)^3} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -6 < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x > 0 \\ x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x > -1 \\ (x^2+x+1)^3 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

	$-\infty$	-1	0	∞
-6		(-)	(-)	(-)
x > -1		(-)	(+)	(+)
x > 0		(-)	(-)	(+)
Valor		(-)	(+)	(-)

Crecimiento $\forall x \in \mathbb{R} / -1 < x < 0$

Decrecimiento $\forall x \in \mathbb{R} / (x < -1) \cup (x > 0)$

Mínimo en x = -1 $\Rightarrow f(-1) = \frac{2(-1)+1}{[(-1)^2+(-1)+1]^2} = \frac{-1}{1} = -1$ (De decrecimiento pasa a crecimiento)

Máximo en x = 0 $\Rightarrow f(0) = \frac{2 \cdot 0 + 1}{[0^2 + 0 + 1]^2} = \frac{1}{1} = 1$ (De crecimiento pasa a decrecimiento)

Continuación problema 3.B.-

a) *Continuación*

Asíntotas verticales

Como $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \Rightarrow \forall x \notin \mathbb{R} \Rightarrow$ No hay asíntotas verticales

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x^4} + \frac{1}{x^4}}{\left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2} = \frac{\frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{\left(1 + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}\right)^2}$$

$$y = \frac{0+0}{(1+0+0)^2} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \text{Asíntota horizontal} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x \rightarrow \infty$$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2(-x)+1}{[(-x)^2+(-x)+1]^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+1}{(x^2-x+1)^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{2x}{x^4} + \frac{1}{x^4}}{\left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)^2}$$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2} = \frac{-\frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{\left(1 - \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}\right)^2} = \frac{-0+0}{(1-0+0)^2} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow$$

Asíntota horizontal $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x \rightarrow -\infty$

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x(x^2+x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x(x^2+x+1)^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x^5} + \frac{1}{x^5}}{\frac{x}{x} \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^5}}{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2}$$

$$m = \frac{\frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}\right)^2} = \frac{0+0}{1 \cdot (1+0+0)^2} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \text{No hay asíntota oblicua cuando } x \rightarrow \infty$$

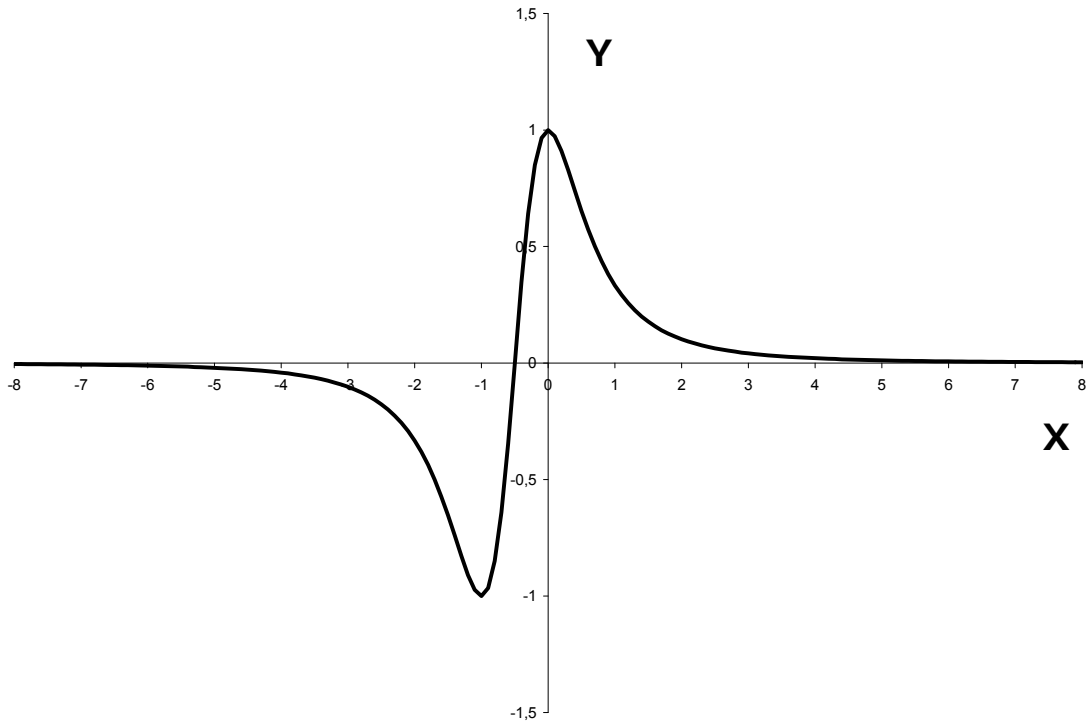
$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x(x^2+x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2(-x)+1}{(-x)[(-x)^2+(-x)+1]^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+1}{(-x)(x^2-x+1)^2} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{2x}{x^5} + \frac{1}{x^5}}{-\frac{x}{x} \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^5}}{(-1) \cdot \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2} = \frac{-\frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{(-1) \cdot \left(1 - \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}\right)^2} = \frac{0+0}{(-1) \cdot (1+0+0)^2} = \frac{0}{-1} = 0$$

\Rightarrow No hay asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$

Continuación del problema 3.B.-

b)



c)

$$A = \int_0^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx = \int_1^7 \frac{1}{t^2} dt = \int_1^7 t^{-2} dt = \frac{1}{(-1)} \cdot [t^{-1}]_1^7 = -\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7} u^2$$

$$x^2 + x + 1 = t \Rightarrow (2x+1) dx = dt \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow t = 2^2 + 2 + 1 = 7 \\ x = 0 \Rightarrow t = 0^2 + 0 + 1 = 1 \end{cases}$$

4.B.- a) Discutir según los valores del parámetro real λ el sistema

$$\begin{cases} \lambda x + 3y + z = \lambda \\ x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

b) Resolver el sistema anterior en el caso $\lambda = 2$

a)

$$\begin{cases} \lambda x + 3y + z = \lambda \\ x + \lambda y + \lambda z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 3 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 3\lambda + 1 - \lambda - \lambda^2 + 3 = -2\lambda^2 + 2\lambda + 4 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow -2\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \\ \lambda_2 = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 2\} \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Cuando $\lambda = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Cuando $\lambda = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sist. Comp. Indeterminado}$$

b)

$$y + 3z = 0 \Rightarrow y = -3z \Rightarrow 2x + 3(-3z) + z = 2 \Rightarrow 2x - 8z = 2 \Rightarrow 2x = 8z + 2 \Rightarrow x = 4z + 1$$

Solución $(4\alpha + 1, -3\alpha, \alpha)$