OPCIÓN A

1.A.- Discutir según los valores del parámetro real **l** la posición relativa de los planos:

$$\begin{cases} \pi_1 : x + z = \lambda \\ \pi_2 : 4x + (\lambda - 2)y + (\lambda + 2)z = \lambda + 2 \\ \pi_3 : 2(\lambda + 1)x - (\lambda + 6)z = -\lambda \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & \lambda - 2 & \lambda + 2 \\ 2(\lambda + 1) & 0 & -(\lambda + 6) \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)(\lambda + 6) - 2(\lambda - 2)(\lambda + 1) = -(\lambda - 2)(\lambda + 6 + 2\lambda + 2)$$

$$|A| = -(\lambda - 2)(3\lambda + 8) \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)(3\lambda + 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \\ 3\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{8}{3} \end{cases}$$

$$\forall \lambda \in \Re - \left\{ -\frac{8}{3}, 2 \right\} \Rightarrow rang(A) = 3 \Rightarrow Los\ tres\ planos\ se\ cortan\ en\ un\ punto\ (Comp.\ Determinado)$$

$$Si\ \lambda = 2$$

$$\begin{cases} \pi_1 : x + z = 2 \\ \pi_2 : 4x + 4z = 4 \\ \pi_3 : 6x - 8z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 : x + z = 2 \\ \pi_2 : x + z = 1 \\ \pi_3 : 6x - 8z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Entre\ \pi_1\ y\ \pi_2 \Rightarrow \dfrac{1}{1} = \dfrac{0}{0} = \dfrac{1}{1} \neq \dfrac{2}{1} \Rightarrow Planos\ paralelos \\ Entre\ \pi_1\ y\ \pi_3 \Rightarrow \dfrac{1}{6} = \dfrac{0}{0} \neq \dfrac{1}{-8} \neq \dfrac{2}{-2} \Rightarrow r : \begin{cases} x + z = 2 \\ 6x - 8z = -2 \end{cases} \\ Entre\ \pi_2\ y\ \pi_3 \Rightarrow \dfrac{1}{6} = \dfrac{0}{0} \neq \dfrac{1}{-8} \neq \dfrac{1}{-2} \Rightarrow s : \begin{cases} x + z = 1 \\ 6x - 8z = -2 \end{cases} \end{cases}$$

Corolario

Cuando l = 2 los planos $\pi_1\ y\ \pi_2$ son paralelos, formando la recta **r** $\pi_1\ y\ \pi_3$ y **s** $\pi_2\ y\ \pi_3$

Continuación del problema 1.A.-

$$Si\ \lambda = -\frac{8}{3}$$

$$\begin{cases} \pi_1 : x + z = -\frac{8}{3} \\ \pi_2 : 4x + \left(-\frac{8}{3} - 2\right)y + \left(-\frac{8}{3} + 2\right)z = -\frac{8}{3} + 2 \\ \pi_3 : 2\left(-\frac{8}{3} + 1\right)x - \left(-\frac{8}{3} + 6\right)z = -\left(-\frac{8}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 : 3x + 3z = -8 \\ \pi_2 : 4x + \left(-\frac{14}{3}\right)y + \left(-\frac{2}{3}\right)z = -\frac{2}{3} \\ \pi_3 : 2\left(-\frac{5}{3}\right)x - \left(\frac{10}{3}\right)z = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \pi_1 : 3x + 3z = -8 \\ \pi_2 : 12x - 14y - 2z = -2 \\ \pi_3 : -10x - 10z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 : 3x + 3z = -8 \\ \pi_2 : 6x - 7y - z = -1 \\ \pi_3 : 5x + 5z = -4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} Entre\ \pi_1\ y\ \pi_2 \Rightarrow \frac{3}{6} \neq \frac{0}{-7} \Rightarrow t : \begin{cases} 3x + 3z = -8 \\ 6x - 7y - z = -1 \end{cases} \\ Entre\ \pi_1\ y\ \pi_3 \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{0}{0} = \frac{3}{5} \neq \frac{-8}{-4} \Rightarrow Planos\ paralelos \\ Entre\ \pi_2\ y\ \pi_3 \Rightarrow \frac{6}{5} \neq \frac{-7}{0} \Rightarrow u : \begin{cases} 6x - 7y - z = -1 \\ 5x + 5z = -4 \end{cases} \end{cases}$$

Corolario

Cuando $\lambda = -\frac{8}{3}$ los planos $\pi_1\ y\ \pi_3$ son paralelos, formando la recta **t** $\pi_1\ y\ \pi_2$ y **u** $\pi_2\ y\ \pi_3$

2.A.- Se consideran las rectas: $r:\begin{cases} x-y=3 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ $\quad y \quad$ $s:\begin{cases} x-z=4 \\ 2x-y=7 \end{cases}$

a) (1 punto). Hallar la recta **t**, perpendicular a **r** y **s**, que pasa por el origen

b) (1 punto). Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta **s** con la recta **t** obtenida en el apartado a)

a) El vector director de la recta t, que arranca de puntos generales de r y s, es perpendicular a estas, por ello los productos escalares de los vectores directores (el de t con cada uno de los de r y s) son nulos.

$$\begin{cases} r:\begin{cases} x=y+3 \\ y+3+y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=\lambda \\ z=3+2\lambda \end{cases} \\ s:\begin{cases} x=4+z \\ 8+2z-y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4+\mu \\ y=1+2\mu \\ z=\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_t}=[3+\lambda-(4+\mu),\ \lambda-(1+2\mu),\ 3+2\lambda-\mu] \\ \overrightarrow{v_r}=(1,1,2) \\ \overrightarrow{v_s}=(1,2,1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_t}=(\lambda-\mu-1,\ \lambda-2\mu-1,\ 2\lambda-\mu+3) \\ \overrightarrow{v_r}=(1,1,2) \\ \overrightarrow{v_s}=(1,2,1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_t}\perp\overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{v_t}.\overrightarrow{v_r}=0 \\ \overrightarrow{v_t}\perp\overrightarrow{v_s} \Rightarrow \overrightarrow{v_t}.\overrightarrow{v_s}=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (\lambda-\mu-1,\ \lambda-2\mu-1,\ 2\lambda-\mu+3)\cdot(1,1,2)=0 \\ (\lambda-\mu-1,\ \lambda-2\mu-1,\ 2\lambda-\mu+3)\cdot(1,2,1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda-\mu-1+\lambda-2\mu-1+4\lambda-2\mu+6=0 \\ \lambda-\mu-1+2\lambda-4\mu-2+2\lambda-\mu+3=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 6\lambda-5\mu+4=0 \\ 5\lambda-6\mu=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -5 & -4 \\ 30 & -36 & 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -5 & -4 \\ 0 & -11 & 20 \end{array}\right) \Rightarrow -11\mu=20 \Rightarrow \mu=-\frac{20}{11} \Rightarrow 5\lambda=6\cdot\left(-\frac{20}{11}\right) \Rightarrow$$

$$\lambda=-\frac{120}{55}=-\frac{24}{11} \Rightarrow \overrightarrow{v_t}=\left[\left(-\frac{24}{11}\right)-\left(-\frac{20}{11}\right)-1,\ \left(-\frac{24}{11}\right)-2\cdot\left(-\frac{20}{11}\right)-1,\ 2\cdot\left(-\frac{24}{11}\right)-\left(-\frac{20}{11}\right)+3\right]$$

$$\overrightarrow{v_t}=\left[\left(-\frac{15}{11}\right),\ \frac{5}{11},\ \frac{5}{11}\right]\equiv(-15,5,5)\equiv(-3,1,1) \Rightarrow t:\begin{cases} x=0-3\alpha=-3\alpha \\ y=0+\alpha=\alpha \\ z=0+\alpha=\alpha \end{cases}$$

b) El punto de corte S de s y t se busca sustituyendo el parámetro correspondiente (en esta caso m) en la ecuación paramétrica que corresponde o sea en la de la recta s

$$\mu=-\frac{20}{11} \Rightarrow \begin{cases} x=4+\left(-\frac{20}{11}\right)=\frac{24}{11} \\ y=1+2\cdot\left(-\frac{20}{11}\right)=-\frac{29}{11} \\ z=-\frac{20}{11} \end{cases} \Rightarrow S\left(\frac{24}{11},\ -\frac{29}{11},\ -\frac{20}{11}\right)$$

3.A.- Dada las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad e \quad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

a) Hallar las constantes a y b tales que $\mathbf{A^2 = aA + bI}$

b) Calcular $\mathbf{A^5}$ utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior

c) Hallar las matrices **X** que satisfacen: $\mathbf{(A - X).(A + X) = A^2 - X^2}$

$a)$

$$A^2=\alpha A+\beta I\begin{cases} A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix} \\ \alpha A+\beta I=\begin{pmatrix}\alpha & 2\alpha\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+\beta & 2\alpha\\ 0 & \alpha+\beta\end{pmatrix}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\alpha=4\Rightarrow\alpha=2\\ \alpha+\beta=1\Rightarrow\beta=1-2=-1\end{cases}$$

$$A^2=2A-I$$

$b)$

$$Sabiendo\ que\begin{cases}I^2=I\\ AI=IA=A\end{cases}$$

$$A^5=\left(A^2\right)^2A=(2A-I)^2A=\left(4A^2-4AI+I^2\right)A=\left[4(2A-I)-4AI+I^2\right]A=(8A-4I-4A+I)A$$

$$A^5=(4A-3I)A=4A^2-3IA=4(2A-I)-3A=8A-4I-3A=5A-4I$$

$$A^5=5\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 0 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 10\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$c)$

$$Sea\ X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Rightarrow X^2=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix}$$

$$A-X=\left[\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1-a & 2-b\\ -c & 1-d\end{pmatrix} \qquad A+X=\left[\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1+a & 2+b\\ c & 1+d\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}(A-X)(A+X)=\begin{pmatrix}1-a & 2-b\\ -c & 1-d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1+a & 2+b\\ c & 1+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-a)(1+a)+(2-b)c & (1-a)(2+b)+(2-b)(1+d)\\ -c(1+a)+(1-d)c & -c(2+b)+(1-d)(1+d)\end{pmatrix}\\ A^2-X^2\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-a^2-bc & 4-ab-bd\\ -ac-cd & 1-bc-d^2\end{pmatrix}\end{cases}$$

$$(A-X)(A+X)=\begin{pmatrix}1-a^2-bc+2c & 2+b-2a-ab+2+2d-b-bd\\ -c-ca+c-cd & -2c-bc+1-d^2\end{pmatrix}$$

$$(A-X)(A+X)=\begin{pmatrix}1-a^2-bc+2c & 4-2a-ab+2d-bd\\ -ca-cd & -2c-bc+1-d^2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}1-a^2-bc+2c=1-a^2-bc\\ 4-2a-ab+2d-bd=4-ab-bd\\ -ca-cd=-ac-cd\\ -2c-bc+1-d^2=1-bc-d^2\end{cases}\Rightarrow$$

Continuación del problema 3.A.-

$c)Continuación$

$$\begin{cases} 2c = 0 \Rightarrow c = 0 \\ -2a + 2d = 0 \Rightarrow a - d = 0 \Rightarrow a = d \\ 0 = 0 \\ -2c = 0 \Rightarrow c = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \forall a \in \Re \\ \forall b \in \Re \end{cases}$$

4.A.- Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$, se pide:

a) Hallar la ecuación de su recta tangente a su gráfica en el punto **[a , f(a)]** para **a>0**

b) Hallar los puntos de corte de la recta tangente hallada en el apartado a) con los dos ejes coordenados

c) Hallar el valor de **a>0** que hace que la distancia entre los dos puntos hallados en b) sea mínima.

$a)$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow\begin{cases} f(a)=\dfrac{1}{a} \\ f'(a)=-\dfrac{1}{a^2}\end{cases}\Rightarrow y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}\cdot(x-a)\Rightarrow a^2y-a=-x+a\Rightarrow x+a^2y-2a=0$$

$b)$

$$\begin{cases} Con\ OX\Rightarrow y=0\Rightarrow x+a^2.0-2a=0\Rightarrow x-2a=0\Rightarrow x=2a\Rightarrow(2a\ ,\ 0) \\ Con\ OY\Rightarrow x=0\Rightarrow 0+a^2.y-2a=0\Rightarrow a^2.y-2a=0\Rightarrow a^2.y=2a\Rightarrow y=\dfrac{2}{a}\Rightarrow\left(0\ ,\ \dfrac{2}{a}\right)\end{cases}$$

$c)$

$$d=\sqrt{(2a-0)^2+\left(0-\frac{2}{a}\right)^2}=\sqrt{4a^2+\frac{4}{a^2}}=\sqrt{\frac{4a^4+4}{a^2}}=\frac{2}{a}\sqrt{a^4+1}\Rightarrow$$

$$d'=2\cdot\frac{\dfrac{4a^3.a}{2\sqrt{a^4+1}}-\sqrt{a^4+1}}{a^2}=2\cdot\frac{\dfrac{2a^4-(a^4+1)}{\sqrt{a^4+1}}}{a^2}=2\cdot\frac{a^4-1}{a^2\sqrt{a^4+1}}$$

$$Si\ d'=0\Rightarrow a^4-1=0\Rightarrow(a^2-1)(a^2+1)=0\Rightarrow\begin{cases} a^2+1=0\Rightarrow a^2=-1\Rightarrow\forall a\notin\Re \\ a^2-1=0\Rightarrow a^2=1\Rightarrow\begin{cases} a=1 \\ a=-1\end{cases}\end{cases}$$

$Como\ a>0\Rightarrow a=1$

Comprobación

$$d''=4\cdot\frac{3a^4+1}{a^3(1+a^4)\sqrt{1+a^4}}\Rightarrow d''(1)=4\cdot\frac{3.1^4+1}{1^3(1+1^4)\sqrt{1+1^4}}=\frac{16}{2\sqrt{2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{2}=8\sqrt{2}>0\Rightarrow Mínimo$$

OPCIÓN B

1.B.-Dada la función $f(x)=\ln\dfrac{x^2}{x-1}$ donde *ln* significa *logaritmo neperiano*, definida para **x >1,** hallar un punto **[a , f(a)]** tal que la recta tangente a la gráfica de **f(x)** en ese punto sea paralela al eje OX

$$f'(x)=\frac{1}{\frac{x^2}{x-1}}\cdot\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)}{x^2}\cdot\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{x^2(x-1)}=\frac{(x-2)x}{x^2(x-1)}=\frac{x-2}{x(x-1)}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x-2=0\Rightarrow x=2\Rightarrow f(2)=\ln\frac{2^2}{2-1}=\ln 4\Rightarrow y-\ln 4=0(x-2)\Rightarrow y-\ln 4=0$$

2.B.-Se considera la función $f(x)=\dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$

a) Calcular los extremos locales y/o globales de la función *f(x)*

b) Determinar el valor del parámetro *a* tal que : $\int_0^a f(x)\,dx=\dfrac{1}{4}$

$a)$

$$f'(x)=\frac{e^x\left(1+e^x\right)^2-2\left(1+e^x\right)e^xe^x}{\left(1+e^x\right)^2}=\frac{\left[\left(1+e^x\right)-2e^x\right]\left(1+e^x\right)e^x}{\left(1+e^x\right)^2}=\frac{\left(1-e^x\right)e^x}{1+e^x}\Rightarrow$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\left(1-e^x\right)e^x=0\Rightarrow\begin{cases}e^x=0\Rightarrow x\ln e=\ln 0\Rightarrow\nexists\forall x\in\Re\\1-e^x=0\Rightarrow e^x=1\Rightarrow x\ln e=\ln 1\Rightarrow x=0\Rightarrow f(0)=\dfrac{e^0}{\left(1+e^0\right)^2}=\dfrac{1}{2^2}\end{cases}$$

$$f''(x)=\frac{\left[\left(1-e^x\right)e^x-e^{2x}\right]\left(1+e^x\right)-\left(1-e^x\right)e^x}{\left(1+e^x\right)^2}=\frac{e^x\left(1-2e^x\right)\left(1+e^x\right)-\left(1-e^x\right)e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$$

$$f''(x)=\frac{e^x\left[1+e^x-2e^x\left(1+e^x\right)\right]-\left(1-e^x\right)e^x}{\left(1+e^x\right)^2}=\frac{e^x\left(1+e^x-2e^x-2e^{2x}\right)-\left(1-e^x\right)e^x}{\left(1+e^x\right)^2}=$$

$$f''(x)=\frac{e^x\left(1-e^x-2e^{2x}-1+e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^2}=-\frac{2e^{3x}}{\left(1+e^x\right)^2}\Rightarrow f''(0)=-\frac{2e^{3.0}}{\left(1+e^0\right)^2}=-\frac{2e^0}{(1+1)^2}=-\frac{2.1}{2^2}=-\frac{1}{2}$$

$$\textit{En el punto}\left(0\,,\frac{1}{4}\right)\textit{hay un Máximo relativo}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2\left(1+e^x\right)e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\left(1+e^x\right)}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{e^x}}{\left(1+\frac{1}{e^x}\right)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{e^x\left(e^x+1\right)^2}{e^{2x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}=0$$

$b)$

$$\int\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}\,dx=\int\frac{1}{t^2}\,dt=\int t^{-2}dt=\frac{1}{(-1)}.t^{-1}=-\frac{1}{t}=-\frac{1}{1+e^x}$$

$$1+e^x=t\Rightarrow e^xdx=dt$$

$$\int_0^a f(x)\,dx=\frac{1}{4}\Rightarrow-\left[\frac{1}{1+e^x}\right]_0^a=\frac{1}{4}\Rightarrow-\left(\frac{1}{1+e^a}-\frac{1}{1+e^0}\right)=\frac{1}{4}\Rightarrow-\frac{1}{1+e^a}+\frac{1}{1+1}=\frac{1}{4}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{1+e^a}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{1+e^a}=\frac{1}{4}\Rightarrow 1+e^a=4\Rightarrow e^a=3\Rightarrow a\cdot\ln e=\ln 3\Rightarrow a.1=\ln 3\Rightarrow a=\ln 3$$

3.B.- Se considera la familia de planos: **mx + (m – 2)y + 3(m + 1)z + (m + 1) = 0**, siendo **m** un parámetro real.

Se pide:

a) Determinar la recta común a todos los planos de la familia

b) Determinar el plano de esta familia que pasa por el punto **P(1 , 1 , 0)**

c) Determinar el plano de esta familia que es paralelo a la recta: $r:\begin{cases} x-2z+1=0 \\ -y+z+1=0 \end{cases}$

$a)$

$$\begin{cases} Con\ m=2 \Rightarrow 2x+9z+3=0 \\ Con\ m=3 \Rightarrow 3x+y+12z+4=0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{-9z-3}{2} \Rightarrow 3\cdot\frac{-9z-3}{2}+y+12z+4=0 \Rightarrow$$

$$y=\frac{27z+9}{2}-12z-4 \Rightarrow y=\frac{27z-24z+9-8}{2} \Rightarrow y=\frac{3z+1}{2} \Rightarrow r:\begin{cases} x=-\frac{3}{2}-\frac{9}{2}\lambda \\ y=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\lambda \\ z=\lambda \end{cases} r:\begin{cases} x=-\frac{3}{2}-9\lambda \\ y=\frac{1}{2}+3\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$$

$b)$

$$m.1+(m-2).1+3(m+1).0+m+1=0 \Rightarrow m+m-2+m+1=0 \Rightarrow 3m-1=0 \Rightarrow m=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}x+\left(\frac{1}{3}-2\right)y+3\left(\frac{1}{3}+1\right)z+\frac{1}{3}+1=0 \Rightarrow \frac{1}{3}x-\frac{5}{3}y+4z+\frac{4}{3}=0 \Rightarrow x-5y+12z+4=0$$

$c)$

$$r:\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow [m\ ,\ m-2\ ,\ 3(m+1)](2\ ,1\ ,1)=0 \Rightarrow 2m+m-2+3m+3=0 \Rightarrow 6m=1$$

$$r:\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow [m\ ,\ m-2\ ,\ 3(m+1)](2\ ,1\ ,1)=0 \Rightarrow 2m+m-2+3m+3=0 \Rightarrow 6m=1$$

$$m=\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{6}x+\left(\frac{1}{6}-2\right)y+3\left(\frac{1}{6}+1\right)z+\frac{1}{6}+1=0 \Rightarrow \frac{1}{6}x-\frac{11}{6}y+\frac{7}{2}z+\frac{7}{6}=0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv x-11y+21z+7=0$$

4.B.- Dada las matrices: $A=\begin{pmatrix}0&k&t\\0&0&k\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\quad y \quad B=\begin{pmatrix}1&k&t\\0&1&k\\0&0&1\end{pmatrix}$

a) Hallar $\mathbf{A}^{10}$

b) Hallar la matriz inversa de B

c) En el caso particular de **k = 0**, hallar $\mathbf{B}^{10}$

$a)$

$$A^2=\begin{pmatrix}0&k&t\\0&0&k\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&k&t\\0&0&k\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&k^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow A^4=\begin{pmatrix}0&0&k^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&k^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A^8=A^4A^4=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow A^{10}=A^8A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&k^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$b)$

$$|B|=\begin{vmatrix}1&k&t\\0&1&k\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow \exists B^{-1}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot adj\left(B^t\right)\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\k&1&0\\t&k&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$adj\left(B^t\right)=\begin{pmatrix}1&-k&k^2-t\\0&1&-k\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}1&-k&k^2-t\\0&1&-k\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-k&k^2-t\\0&1&-k\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$c)$

$$B^2=\begin{pmatrix}1&0&t\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&t\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2t\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow B^4=B^2\cdot B^2\begin{pmatrix}1&0&2t\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2t\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&4t\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$B^8=B^4\cdot B^4=\begin{pmatrix}1&0&4t\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&4t\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&8t\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$B^{10}=B^8\cdot B^2=\begin{pmatrix}1&0&8t\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2t\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&10t\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$