

Opción A

1.A.-Hallar los puntos de la recta $r \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{-1}$ cuya distancia al plano

$\pi: 2x - y + 2z + 1 = 0$ es igual a 1

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 5 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow d_{P,\pi} = 1 = \pm \frac{|2(3+\lambda) - (5+\lambda) + 2(-1-\lambda) + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} \Rightarrow 1 = \pm \frac{|6 + 2\lambda - 5 - \lambda - 2 - 2\lambda + 1|}{3}$$

$$3 = \pm |-\lambda| \Rightarrow \begin{cases} -\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = -3 \Rightarrow P_1 \begin{cases} x = 3 - 3 \\ y = 5 - 3 \\ z = -1 - (-3) \end{cases} \Rightarrow P_1(0, 2, 2) \\ \lambda = 3 \Rightarrow P_2 \begin{cases} x = 3 + 3 \\ y = 5 + 3 \\ z = -1 - 3 \end{cases} \Rightarrow P_2(6, 8, -4) \end{cases}$$

2.A.- Se consideran las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x - z = 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$. Hallar la ecuación continua de la recta que contiene al punto P (2, -1, 2) y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + y \\ 3 + y + y - z = 0 \Rightarrow z = 3 + 2y \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, 2)$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 4 + z \\ 2(4 + z) - y = 7 \Rightarrow 8 + 2z - 7 = y \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 4 + \mu \\ y = 1 + 2\mu \\ z = \mu \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s = (1, 2, 1)$$

Hay dos formas de calcular el vector perpendicular a los dados, la primera utilizando el producto escalar ya que el producto de ambos con el buscado es cero en ambos casos:

$$\text{Sea } \vec{v}_t = (a, b, 1) \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_t \perp \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_t \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow (a, b, 1) \cdot (1, 1, 2) = 0 \Rightarrow a + b + 2 = 0 \Rightarrow b - 1 = 0 \Rightarrow \\ \vec{v}_t \perp \vec{v}_s \Rightarrow \vec{v}_t \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow (a, b, 1) \cdot (1, 2, 1) = 0 \Rightarrow a + 2b + 1 = 0 \end{cases}$$

$$b = 1 \Rightarrow a + 1 + 2 = 0 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow \vec{v}_t = (-3, 1, 1)$$

La segunda forma es hallar el producto vectorial de los vectores de la recta, el resultante de ello es el vector perpendicular a ambos

$$\vec{v}_t = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} - \vec{k} - 4\vec{i} - \vec{j} = -3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \vec{v}_t = (-3, 1, 1)$$

$$\text{Ecuación de la recta pedida } t \equiv \frac{x-2}{-3} = y+1 = z-2$$

3.A.- Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} x + (k+1)y + 2z = -1 \\ kx + y + z = k \\ (k-1)x - 2y - z = k+1 \end{cases}$$
, se pide:

a) Discutirlo según los diversos valores del parámetro k

b) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ k-1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + (k+1) \cdot (k-1) - 4k - 2 \cdot (k-1) + 2 + k(k+1)$$

$$|A| = k^2 - 1 - 4k - 2k + 2 + k^2 + k + 1 = 2k^2 - 5k + 2 \Rightarrow \text{Si } 2k^2 - 5k + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 16 = 9 \Rightarrow$$

$$k_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{5+3}{4} = 2 \\ k_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Si } \begin{cases} k \neq 2 \\ k \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

$$\text{Si } k = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 \quad \text{Si } k = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

El estudio de lo que pasará cuando k sea 2 ó 1/2 se puede hacer de dos formas, una por Gauss y otra por el teorema de Rouché-Frobenius

Por Gauss

Cuando $k = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & -3 & 4 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Cuando $k = \frac{1}{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & -1 & \frac{3}{2} \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -2 & 3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -2 \\ -1 & -4 & -2 & 3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array} \right) \Rightarrow$$

Sistema Incompatible

a)Continuación

2º Forma. – Por Rouché – Frobenius

$$|A/B| = |C_1 \quad C_2 \quad B| = \begin{vmatrix} 1 & k+1 & -1 \\ k & 1 & k \\ k-1 & -2 & k+1 \end{vmatrix} = (k+1) + k(k+1)(k-1) + 2k + (k-1) + 2k - k(k+1)^2$$

$$|A/B| = k+1+k-1+k(k+1)(k-1-k-1)+4k = 6k+k(k+1)(-2) = -2k^2+4k = 2k(-k+2)$$

$$\text{Si } 2k(-k+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A/B) = 2 \\ -k+2=0 \Rightarrow k=2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A/B) = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Si } \begin{cases} k \neq 0 \\ k \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \text{rang}(A/B) = 3$$

$$|A/B| = |C_1 \quad C_3 \quad B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ k & 1 & k \\ k-1 & -1 & k+1 \end{vmatrix} = (k+1) + 2k(k-1) + k + (k-1) + k - 2k(k+1)$$

$$|A/B| = k+1+2k+k-1+2k(k-1-k-1) = 4k-4k = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} \Rightarrow \text{rang}(A/B) = 2$$

2º Forma. – Por Rouché – Frobenius(Continuación)

$$|A/B| = |C_2 \quad C_3 \quad B| = \begin{vmatrix} k+1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & k \\ -2 & -1 & k+1 \end{vmatrix} = (k+1)^2 - 4k + 1 - 2 + k(k+1) - 2(k+1)$$

$$|A/B| = k^2 + 2k + 1 - 4k - 1 + k^2 + k - 2k - 2 = 2k^2 - 3k - 2 \Rightarrow \text{Si } 2k^2 - 3k - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 + 16 = 25$$

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{3+5}{4} = 2 \\ k_{1,2} = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Si } \begin{cases} k \neq 2 \\ k \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{rang}(A/B) = 3$$

$$\text{Si } \begin{cases} k=2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A/B) = 2 \\ k = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A/B) = 2 \end{cases}$$

Por lo tanto :

Si $k = 2 \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 \neq \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

Si $k = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A/B) = 3 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$

b)

Por Gauss. Calculado en a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow -5y - 3z = 4 \Rightarrow 3z = -4 - 5y \Rightarrow z = \frac{-4 - 5y}{3} \Rightarrow$$

$$x + 3y + 2 \cdot \left(\frac{-4 - 5y}{3} \right) = -1 \Rightarrow 3x + 9y - 8 - 10y = -3 \Rightarrow 3x = y + 5 \Rightarrow x = \frac{y + 5}{3} \Rightarrow$$

$$\text{Solución} \left(\frac{\lambda + 5}{3}, \lambda, \frac{-4 - 5\lambda}{3} \right)$$

Por Rouche - Froebenius

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ -6x - 3y - 3z = -6 \end{cases} \Rightarrow -5x - z = -7 \Rightarrow z = 7 - 5x \Rightarrow x + 3y + 2(7 - 5x) = -1 \Rightarrow$$

$$x + 3y + 14 - 10x = -1 \Rightarrow 3y = -15 + 9x \Rightarrow y = -5 + 3x \Rightarrow \text{Solución}(\lambda, -5 + 3\lambda, 7 - 5\lambda)$$

4.A.- a) Hallar los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$$

b) Determinar una función $F(x)$ tal que su derivada sea $f(x)$ y además $F(0) = 4$

a)

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{(6x+1)(x^2+1) - 2x(3x^2+x+3)}{(x^2+1)^2} = \frac{6x^3 + 6x + x^2 + 1 - 6x^3 - 2x^2 - 6x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$\text{Si } f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow f(-1) = \frac{3(-1)^2 + (-1) + 3}{(-1)^2 + 1} = \frac{5}{2} \\ x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{3(1)^2 + 1 + 3}{1^2 + 1} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{(-2)x(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)2x(1-x^2)}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(-2)x(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)2x(1-x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{(-2)x(x^2+1) - 4x(1-x^2)}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x^3 - 2x - 4x + 4x^3}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow f''(-1) = \frac{2(-1)^3 - 6(-1)}{[(-1)^2+1]^3} = \frac{-2+6}{2^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} > 0 \\ x = 1 \Rightarrow f''(1) = \frac{2(1)^3 - 6(1)}{[1^2+1]^3} = \frac{2-6}{2^3} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} < 0 \end{cases}$$

En el punto $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$ existe un mínimo relativo

En el punto $\left(1, \frac{7}{2}\right)$ existe un Máximo relativo

$$\text{Si } f''(x) = 0 \Rightarrow 2x(x^2-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{3 \cdot 0^2 + 0 + 3}{0^2 + 1} = 3 \\ x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \Rightarrow f(\sqrt{3}) = \frac{3(\sqrt{3})^2 + \sqrt{3} + 3}{(\sqrt{3})^2 + 1} \\ x = -\sqrt{3} \Rightarrow f(-\sqrt{3}) = \frac{3(-\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3}) + 3}{(-\sqrt{3})^2 + 1} \end{cases} \end{cases}$$

Continúa el problema 4.A.-

$$f'''(x) = \frac{(-2)x(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)2x(1-x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{(-2)x(x^2+1) - 4x(1-x^2)}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x^3 - 2x - 4x + 4x^3}{(x^2+1)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow f'''(-1) = \frac{2(-1)^3 - 6(-1)}{[(-1)^2+1]^3} = \frac{-2+6}{2^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} > 0 \\ x = 1 \Rightarrow f'''(1) = \frac{2(1)^3 - 6(1)}{[1^2+1]^3} = \frac{2-6}{2^3} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} < 0 \end{cases}$$

En el punto $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$ existe un mínimo relativo

En el punto $\left(1, \frac{7}{2}\right)$ existe un Máximo relativo

$$\text{Si } f''(x) = 0 \Rightarrow 2x(x^2-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{3 \cdot 0^2 + 0 + 3}{0^2 + 1} = 3 \\ x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \Rightarrow f(\sqrt{3}) = \frac{3(\sqrt{3})^2 + \sqrt{3} + 3}{(\sqrt{3})^2 + 1} \\ x = -\sqrt{3} \Rightarrow f(-\sqrt{3}) = \frac{3(-\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3}) + 3}{(-\sqrt{3})^2 + 1} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Puntos de inflexión} \left\{ \begin{array}{l} (0, 3) \\ (\sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}) \\ \left(-\sqrt{3}, \frac{-6 - \sqrt{3}}{4}\right) \end{array} \right.$$

b)

$$F(x) = \int \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1} dx = \int \left(3 + \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = 3 \int dx + \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = 3x + \int \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{2} = 3x + \frac{1}{2} \cdot \ln t$$

$$x^2 + 1 = t \Rightarrow 2x dx = dt \Rightarrow x dx = \frac{dt}{2}$$

$$\frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1} \quad \underline{\underline{x^2 + 1}}$$

$$\frac{-3x^2 - 3}{x}$$

$$F(x) = 3x + \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 1) + K \Rightarrow F(0) = 4 \Rightarrow 3 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \ln(0^2 + 1) + K = 4 \Rightarrow K = 4$$

$$F(x) = 3x + \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 1) + 4$$

1.B.-Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica $XA^2 + BA = A^2$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$XA^2 = A^2 - BA \Rightarrow XA^2A^{-2} = (A^2 - BA)A^{-2} \Rightarrow X = A^2A^{-2} - BAA^{-2} = I - BAA^{-1}A^{-1} = I - BIA^{-1}$$

$$X = I - BA^{-1} \Rightarrow$$

$$\exists A^{-1} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A^t) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$B.A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = I - B.A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.B.-Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases}$, se pide:

a) Calcular **a** y **b** de manera que al añadir una tercera ecuación **ax + y + bz = 1** el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el sistema original

b) Calcular las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea **4**

a) El sistema es Compatible Indeterminado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ a & 1 & b & 1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1-2a & b+3a & 1-3a \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & b+3a+7(1-2a) & 1-3a-(1-2a) \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b+3a+7-14a=0 \\ 1-3a-1+2a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -11a+b+7=0 \\ -a=0 \end{cases} \Rightarrow a=0 \Rightarrow b=-7 \Rightarrow \text{Ecuación} \Rightarrow y-7z=1$$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow -y+7z=-1 \Rightarrow y=7z+1 \Rightarrow x+2(7z+1)-3z=3 \Rightarrow$$

$$x+14z+2-3z=3 \Rightarrow x=1-11z \Rightarrow \text{Solución general}(1-11\lambda, 7\lambda+1, \lambda)$$

$$\text{Si } 1-11\lambda+7\lambda+1+\lambda=4 \Rightarrow -3\lambda=2 \Rightarrow \lambda=-\frac{2}{3} \Rightarrow \text{Solución} \left[1-11\left(-\frac{2}{3}\right), 7\left(-\frac{2}{3}\right)+1, \left(-\frac{2}{3}\right) \right]$$

$$\text{Solución} \left(\frac{25}{3}, -\frac{11}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

3.B.- Sean las rectas $r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}$ y $s: \begin{cases} x-3y-5=0 \\ x-3z-8=0 \end{cases}$

a) Hallar las ecuaciones del plano π que contiene a r y es paralelo a s

b) Calcular la distancia entre el plano π y la recta s

a) El plano queda definido por el vector director de la recta r , por el vector director de s que al ser paralelo y por el vector generador que se forma por el punto innominado (x, y, z) y un punto del plano A, por ejemplo de la recta r

$$-3y + 3z + 3 = 0 \Rightarrow 3y = 3z + 3 \Rightarrow y = z + 1 \Rightarrow x = 3z + 8 \Rightarrow s: \begin{cases} x = 8 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{v}_s = (3, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$A(0, 1, 2) \Rightarrow \vec{AG} = (x, y, z) - (0, 1, 2) = (x, y-1, z-2)$$

$$-x + 6(y-1) + (z-2) + 3(z-2) - 2x - (y-1) = 0 \Rightarrow -3x + 5(y-1) + 4(z-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi: 3x - 5y - 4z + 13 = 0$$

b) Al ser paralelos el plano π y la recta s la distancia es la de un punto cualquiera de esa recta, tomaremos B $(8, 1, 0)$, al plano

$$-3y + 3z + 3 = 0 \Rightarrow 3y = 3z + 3 \Rightarrow y = z + 1 \Rightarrow x = 3z + 8 \Rightarrow s: \begin{cases} x = 8 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{v}_s = (3, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$A(0, 1, 2) \Rightarrow \vec{AG} = (x, y, z) - (0, 1, 2) = (x, y-1, z-2)$$

$$-x + 6(y-1) + (z-2) + 3(z-2) - 2x - (y-1) = 0 \Rightarrow -3x + 5(y-1) + 4(z-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi: 3x - 5y - 4z + 13 = 0$$

$$d_{B,\pi} = \frac{|3 \cdot 8 - 5 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + 13|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-4)^2}} = \frac{|32|}{\sqrt{50}} = \frac{32}{5\sqrt{2}} = \frac{32\sqrt{2}}{10} = \frac{16\sqrt{2}}{5} u$$

4.B.- Sea $g(x)$ una función continua y derivable para todo valor real de x , de la que se conoce la siguiente información:

I) $g'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ mientras que $g'(x) < 0$ para todo $x \in (0, 2)$

II) $g''(x) > 0$ para todo $x \in (1, 3)$ mientras que $g''(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$

III) $g(-1) = 0$ $g(0) = 2$ $g(2) = 1$

IV) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 3$

Teniendo en cuenta los datos anteriores se pide:

- a) Analizar, razonadamente, la posible existencia o no existencia de asintotas verticales, horizontales u oblicuas
- b) Dibujar de manera esquemática la gráfica de la función $g(x)$
- c) Si $G(x) = \int_0^x g(t) dt$ encontrar un valor x_0 su derivada $G'(x) = 0$

a) Hay una asíntota horizontal $y = 3$ cuando $x \rightarrow \infty$

Puntos de corte $\begin{cases} \text{Con } OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow g(0) = 1 \\ \text{Con } OX \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$

Hay un máximo y un mínimo relativo en uno de los dos puntos $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow g(0) = 1 \\ x = 2 \Rightarrow g(2) = 1 \end{cases}$

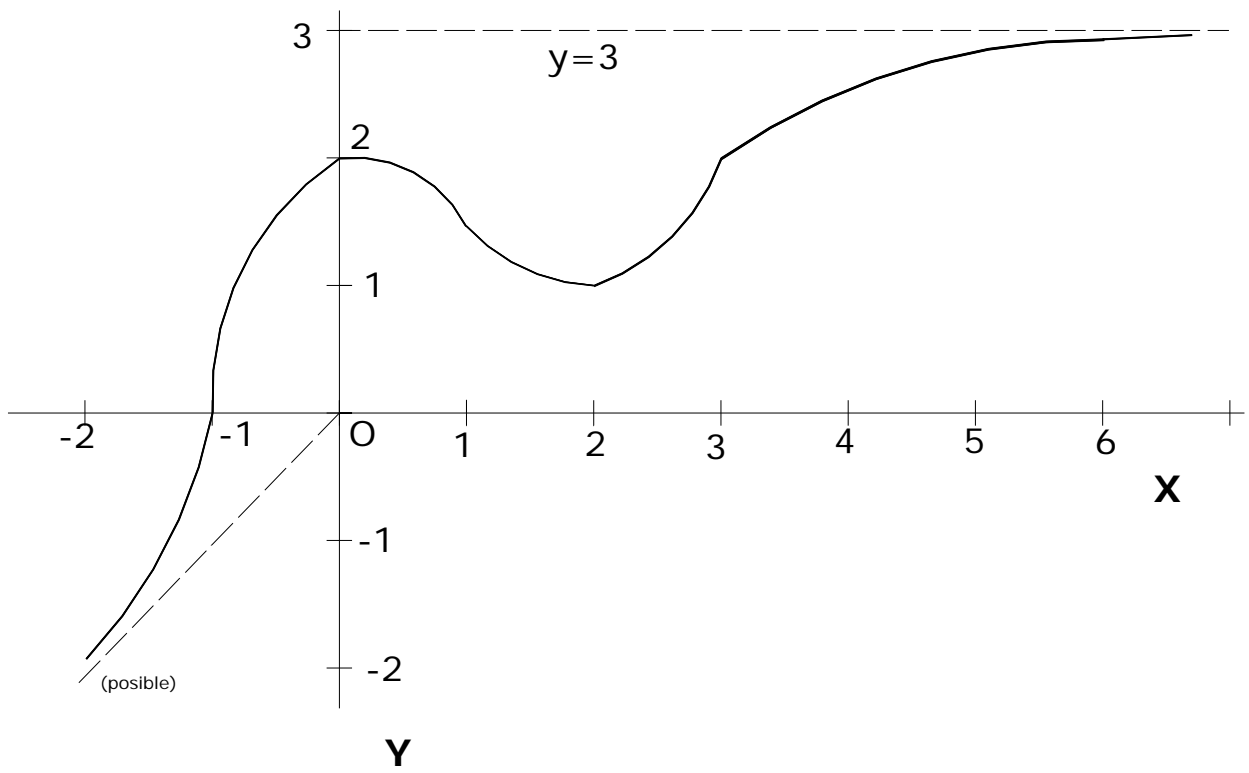
Hay un punto de inflexión en cada uno de los puntos $\begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

No hay indicios de asíntota vertical

Si puede haber una asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$

Continuación del problema 4.B

b)



c)

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt \Rightarrow G'(x_0) = g(x_0) = 0 \Rightarrow \text{Del gráfico} \Rightarrow x_0 = -1$$