OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Dado el plano $\pi \equiv x+3y+z=4$, se pide:

a) Calcular el punto simétrico **P** del punto **O(0 , 0 , 0)** respecto del plano π

b) Calcular el coseno del ángulo α que forman el plano π y el plano **x = 0**

c) Calcular el volumen del tetraedro **T** determinado por el plano π y los planos **x = 0, y = 0** y **z = 0.**

a) Por el punto O trazamos una recta ***r*** perpendicular al plano π, utilizando el vector director de este, hallando el punto **P** de corte de la recta con el plano, que es el punto medio entre **O** y su simétrico **O'**

$$\pi \equiv x+3y+z=4 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=0+\lambda \\ y=0+3\lambda \\ z=0+\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda+3\cdot 3\lambda+\lambda=4 \Rightarrow 11\lambda=4 \Rightarrow \lambda=\frac{4}{11} \Rightarrow P\begin{cases} x=\frac{4}{11} \\ y=3\cdot\frac{4}{11} \\ z=\frac{4}{11} \end{cases} \Rightarrow$$

$$P\left(\frac{4}{11},\frac{12}{11},\frac{4}{11}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{11}=\frac{0+x_{O'}}{2} \Rightarrow x_{O'}=\frac{8}{11} \\ \frac{12}{11}=\frac{0+y_{O'}}{2} \Rightarrow y_{O'}=\frac{24}{11} \\ \frac{4}{11}=\frac{0+z_{O'}}{2} \Rightarrow z_{O'}=\frac{8}{11} \end{cases} \Rightarrow O'\left(\frac{8}{11},\frac{24}{11},\frac{8}{11}\right)$$

$b)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi}=(1,3,1) \\ \overrightarrow{v_{x=0}}=(1,0,0) \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{v_{x=0}}\right|}{\left|\overrightarrow{v_\pi}\right|\left|\overrightarrow{v_{x=0}}\right|}=\frac{\left|(1,3,1)\cdot(1,0,0)\right|}{\sqrt{1^2+3^2+1^2}\sqrt{1^2+0^2+0^2}}=\frac{1}{\sqrt{11}\sqrt{1}}=\frac{\sqrt{11}}{11}=0'3015113445$$

$c)$

$$Puntos\ de\ corte\begin{cases} Con\ el\ eje\ OX\begin{cases} x=\alpha \\ y=0 \Rightarrow \alpha+3.0+0=4 \Rightarrow \alpha=4 \Rightarrow A(4,0,0) \\ z=0 \end{cases} \\ Con\ el\ eje\ OY\begin{cases} x=0 \\ y=\mu \Rightarrow 0+3.\mu+0=4 \Rightarrow \mu=\frac{4}{3} \Rightarrow B\left(0,\frac{4}{3},0\right) \\ z=0 \end{cases} \\ Con\ el\ eje\ OZ\begin{cases} x=0 \\ y=0 \Rightarrow 0+3.0+\beta=4 \Rightarrow \beta=4 \Rightarrow C(0,0,4) \\ z=\beta \end{cases} \end{cases}$$

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left[\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}\right)\right]=\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\cdot 4\cdot\frac{4}{3}\cdot 4=\frac{64}{18}=\frac{32}{9}\ u^3$$

2.A.- Dado el sistema: $\begin{cases} 4x+4\lambda y+2z=2\lambda \\ \lambda x+y-\lambda z=\lambda \\ 4\lambda x+4\lambda y+\lambda z=9 \end{cases}$, se pide:

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ

b) Resolver el sistema para $\lambda=-1$

$$|A|=\begin{vmatrix} 4 & 4\lambda & 2 \\ \lambda & 1 & -\lambda \\ 4\lambda & 4\lambda & \lambda \end{vmatrix}=2\lambda\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2\lambda & 1 \\ \lambda & 1 & -\lambda \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}=2\lambda\cdot\left(2-8\lambda^2+4\lambda-4+8\lambda-2\lambda^2\right)=2\lambda\cdot\left(-10\lambda^2+12\lambda-2\right)$$

$$|A|=(-4)\cdot\lambda\cdot\left(5\lambda^2-6\lambda+1\right)\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow(-4)\cdot\lambda\cdot\left(5\lambda^2-6\lambda+1\right)=0\Rightarrow\begin{cases} \lambda=0 \\ 5\lambda^2-6\lambda+1=0 \end{cases}\Rightarrow$$

$$5\lambda^2-6\lambda+1=0\Rightarrow\Delta=36-20=16>0\Rightarrow\lambda=\frac{6\pm\sqrt{16}}{10}\Rightarrow\begin{cases} \lambda=\frac{6+4}{10}=1 \\ \lambda=\frac{6-4}{10}=\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\forall\lambda\in\Re-\left\{0\,,\frac{1}{5}\,,1\right\}\Rightarrow Rang(A)=3=N^o\ de\ incognitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ \lambda=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right)\Rightarrow 0z=9\Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$Si\ \lambda=\frac{1}{5}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & \frac{4}{5} & 2 & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 9 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 4 & 10 & 4 \\ 20 & 100 & -20 & 20 \\ 20 & 20 & 5 & 225 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 4 & 10 & 4 \\ 0 & 96 & -30 & 16 \\ 0 & 16 & -5 & 221 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 4 & 10 & 4 \\ 0 & 96 & -30 & 16 \\ 0 & 96 & -30 & 1326 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 4 & 10 & 4 \\ 0 & 96 & -30 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1310 \end{array}\right)$$

$Sistema\ Incompatible$

$Si\ \lambda=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & -4 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 42 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 44 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$Sistema\ Incompatible$

$b)$

$Si\ \lambda = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -4 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 9 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -4 & 2 & -2 \\ -4 & 4 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & -1 & 9 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & -8 & 1 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow 6z = -6 \Rightarrow z = -1 \Rightarrow -8y - 1 = 7 \Rightarrow$$

$$y = -1 \Rightarrow 4x + 4 - 2 = -2 \Rightarrow 4x = -4 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow Solución(-1\,,-1\,,-1)$$

3.A.- Estudiar el siguientes límite $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{(x+1)}$ según los valores del parámetro α

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{(x+1)}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{(\alpha x^2+4x+8)}\right]^{(x+1)\cdot\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\alpha x^2+4x+8}}$$

$$N=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\alpha x^2+4x+8}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\alpha\frac{x^2}{x^2}+4\frac{x}{x^2}+\frac{8}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\alpha+4\frac{1}{x}+\frac{8}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{\alpha+4\frac{1}{\infty}+\frac{8}{\infty}}=\frac{0+0}{\alpha+4.0+0}=\frac{0}{\alpha}$$

$$Cuando\begin{cases}\alpha\neq 0\Rightarrow N=0\Rightarrow L=e^0=1\\ \alpha=0\Rightarrow N=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{4x+8}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{4\frac{x}{x}+\frac{8}{x}}=\frac{1+\frac{1}{\infty}}{4+\frac{8}{\infty}}=\frac{1}{4}\Rightarrow L=e^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{e}\end{cases}$$

4.A.- Calcular la integral $F(x)=\int_0^x t^2e^{-t}dt$

$$F(x)=\int_0^x t^2e^{-t}dt=-\left[t^2e^{-t}\right]_0^x+2\int t\,e^{-t}dt=-\left(x^2e^{-x}-0^2e^{-0}\right)+2\left\{-\left[te^{-t}\right]_0^x+\int e^{-t}dt\right\}$$

$$\begin{cases} t^2=u\Rightarrow 2t\,dt=du \\ dv=e^{-t}dt\Rightarrow \int e^{-t}dt=-\int e^s ds=-e^s=-e^{-t} \end{cases}\qquad \begin{cases} t=u\Rightarrow dt=du \\ dv=e^{-t}dt\Rightarrow \int e^{-t}dt=-e^{-t} \end{cases}$$

$$-t=s\Rightarrow dt=-ds$$

$$F(x)=-\left(x^2e^{-x}-0\cdot e^0\right)+2\left\{-\left(xe^{-x}-0\cdot e^0\right)+\int e^{-t}dt\right\}=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2\left[e^{-t}\right]_0^x$$

$$F(x)=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2\cdot\left(e^{-x}-e^0\right)=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2\cdot e^{-x}+2$$

OPCIÓN B

1.B.- Dada las rectas: $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$, $s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$ se pide:

a) Hallar la ecuación del plano π que contiene a ***r*** y es paralelo a ***s***

b) Determinar la distancia entre ***r*** y ***s***

c) Estudiar si la recta ***t*** paralela a ***r*** y que pasa por **O(0 , 0 , 0)** corta a la recta ***s***

a) Los vectores generadores del plano π son los de la recta ***r*** y ***s*** y el formado por el punto genérico del plano y el indicado en la recta ***r*** que son coplanarios, por lo tanto el determinante, por ellos formado, es nulo y la ecuación del plano pedido

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2\,,3\,,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (2\,,1\,,1) \\ \overrightarrow{AG} = (x\,,\,y\,,\,z) - (1\,,2\,,0) = (x-1\,,\,y-2\,,\,z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$3(x-1) + 2(y-2) + 2z - 6z - (x-1) - 2(y-2) = 0 \Rightarrow 2(x-1) - 4z = 0 \Rightarrow 2x - 2 - 4z = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv x - 2z - 1 = 0$$

b) Por ***r*** trazaremos un plano paralelo a **s** (el plano π hallado) y hallaremos la distancia de el punto **B** dado en la recta **s** al plano que es el que existe entre las rectas.

$$\begin{cases} B = (-2\,,0\,,2) \\ \pi \equiv x - 2z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow d_{rs} = d_{B\pi} = \frac{|-2-2.2-1|}{\sqrt{1^2+0^2+(-2)^2}} = \frac{|-7|}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}\,u$$

$c)$

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_t} = (2\,,3\,,1) \Rightarrow \begin{cases} t \equiv \begin{cases} x = 0 + 2\lambda \\ y = 0 + 3\lambda \\ z = 0 + \lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = -2 + 2\mu \\ y = \mu \\ z = 2 + \mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda = -2 + 2\mu \\ 3\lambda = \mu \\ \lambda = 2 + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - \mu = -1 \\ 3\lambda - \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - \mu = -1 \\ \lambda - \mu = 2 \end{cases} \Rightarrow 0 \neq -3 \Rightarrow$$

$$Sistema\ Incompatible \Rightarrow No\ se\ cortan\ t\ y\ s$$

2.B.- Si la derivada de la función **f(x)** es $f'(x)=(x-1)^3(x+5)$ obtener:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ***f***
b) Los valores de **x** en los cuales ***f*** tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión
c) La función ***f*** sabiendo que **f(0) = 0**

$a)$

$$f'(x)>0\Rightarrow(x-1)^3(x+5)>0\Rightarrow\begin{cases}(x-1)^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ x-1>0\Rightarrow x>1\Rightarrow\forall x\in\Re/x>1\\ x+5>0\Rightarrow x>-5\Rightarrow\forall x\in\Re/x>-5\end{cases}$$

	$-\infty$ **- 5**	**1**	∞
x > -5	**(-)**	**(+)**	**(+)**
x > 1	**(-)**	**(-)**	**(+)**
Resultado	**(+) f'(x) > 0**	**(-) f'(x) < 0**	**(+) f'(x) > 0**

$$f''(x)=3(x-1)^2(x+5)+(x-1)^3=(x-1)^2(3x+15+x-1)=(x-1)^2(4x+14)=2(x-1)^2(2x+7)$$

$$f''(x)=0\Rightarrow2(x-1)^2(2x+7)=0\Rightarrow\begin{cases}x-1=0\Rightarrow x=1\\2x+7=0\Rightarrow x=-\dfrac{7}{2}\end{cases}\Rightarrow Posibles\ \ puntos\ de\ \inf lexión$$

$$f''(-5)=2[(-5)-1]^2[2(-5)+7]=2.36.(-3)=-216<0\Rightarrow Máximo$$

$$f'''(x)=2\cdot\left[2(x-1)(2x+7)+2(x-1)^2\right]=4(x-1)(2x+7+x-1)=4(x-1)(3x+6)=12(x-1)(x+2)$$

$$\begin{cases}f'''(1)=12(1-1)(1+2)=0\Rightarrow Dudoso\\ f'''\left(-\dfrac{7}{2}\right)=12\left[\left(-\dfrac{7}{2}\right)-1\right]\left[\left(-\dfrac{7}{2}\right)+2\right]=12\cdot\left(-\dfrac{9}{2}\right)\left(-\dfrac{3}{2}\right)=3.27=81\neq0\Rightarrow Punto\ de\ \inf lexión\end{cases}$$

$$f^{IV}(x)=12(x+2+x-1)=12(2x+1)\Rightarrow f^{IV}(1)=12\cdot(2.1+1)=36>0\Rightarrow Mínimo$$

Es creciente para $\forall x\in\Re/(x<-5)\cup(x>1)$

Es decreciente para $\forall x\in\Re/-5<x<1$

b)

Máximo en **x = -5** Mínimo en **x = 1** **Punto de inflexión de tangente oblicua** $x=-\dfrac{7}{2}$

c)

$$f(x)=\int(x-1)^3(x+5)\,dx=\int t^3(t+6)\,dt=\int t^4dt+6\int t^3dt=\frac{1}{5}\cdot t^5+\frac{6}{4}\cdot t^4=\frac{1}{5}\cdot(x-1)^5+\frac{3}{2}\cdot(x-1)^4+K$$

$$x-1=t\Rightarrow dx=dt\Rightarrow x=t+1\Rightarrow x+5=t+6$$

$$f(0)=0\Rightarrow\frac{1}{5}\cdot(0-1)^5+\frac{3}{2}\cdot(0-1)^4+K=0\Rightarrow+\frac{1}{5}+\frac{3}{2}+K=0\Rightarrow K=\frac{1}{5}-\frac{3}{2}=-\frac{13}{10}$$

$$f(x)=\frac{1}{5}\cdot(x-1)^5+\frac{3}{2}\cdot(x-1)^4-\frac{13}{10}$$

3.B.- Dado el sistema: $\begin{cases} 2x-y=\lambda \\ \lambda x-2y=4 \\ 3x-y=2 \end{cases}$, se pide:

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ

b) Resolver el sistema cuando sea posible

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-2+3=1\neq 0 \Rightarrow rang(A)=2 \Rightarrow Para\ ser\ Sistema\ Compatible\ Deter\min ado \Rightarrow$$

$$rang(A/B)=2 \Rightarrow |A/B|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ \lambda & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -8-12-\lambda^2+6\lambda+8+2\lambda=0 \Rightarrow -\lambda^2+8\lambda-12=0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2-8\lambda+12=0 \Rightarrow \Delta=64-48=16>0 \Rightarrow \lambda=\frac{8\pm\sqrt{16}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=\dfrac{8+4}{2}=6 \\ \lambda=\dfrac{8-4}{2}=2 \end{cases}$$

$$\forall \lambda \in \Re-\{2\ ,6\} \Rightarrow |A/B|\neq 0 \Rightarrow rang(A)=2\neq rang(A/B)=3 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$$\lambda=2 \Rightarrow |A/B|=0 \Rightarrow |A/B|=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-2\neq 0 \Rightarrow rang(A)=rang(A/B)=2=N^{o}\ de\ incognitas \Rightarrow$$

$Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$

$$\lambda=6 \Rightarrow |A/B|=0 \Rightarrow |A/B|=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}=2\neq 0 \Rightarrow rang(A)=rang(A/B)=2=N^{o}\ de\ incognitas \Rightarrow$$

$Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$

$b)$

$Si\ \lambda=2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 6 & -2 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -y=2 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow 2x+2=2 \Rightarrow x=0 \Rightarrow$$

$Solución(0\ ,2)$

$c)$*Continuación*

$Si\ \lambda = 6$

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 6x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 6 \\ -3x + y = -2 \end{cases} \Rightarrow -x = 4 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow 2 \cdot (-4) - y = 6 \Rightarrow -y = 6 + 8 \Rightarrow y = -14$$

$$6(-4) - 2(-14) = 4 \Rightarrow -24 + 28 = 4 \Rightarrow Solución(-4\ ,\ -14)$$

4.B.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, se pide:

a) Estudiar el rango de la matriz **A** según el valor del parámetro ***a***

b) Obtener la inversa de la matriz **A** para **a = -1**

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=a^3+1+1-a-a-a=a^3-3a+2 \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow a^3-3a+2=0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \underline{|0} \end{array}$$

$$(a-1)(a^2+a-2)=0 \Rightarrow a^2+a-2=0 \Rightarrow \Delta=1+8=9>0 \Rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} \Rightarrow$$

$$(a-1)^2(a+2)=0$$

$$\forall a \in \Re-\{-2\,,1\} \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow rang(A)=3$$

$Si\ a=1$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang(A)=1$$

$Si\ a=-2$

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang(A)=2$$

$b)$

$$|A|=(-1)^3-3\cdot(-1)+2=-1+3+2=4\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adj(A^t) \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$adj(A^t)=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$