

OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

Dada la función $f(x) \equiv \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$, se pide:

- (0'75 puntos). Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$
- (0'75 puntos). Hallar el punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$
- (0'75 puntos). Hallar las asíntotas y dibujar la gráfica de $f(x)$
- (0'75 puntos). Hallar el área del recinto acotado que limitan la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $y = x + 2$, $x = 1$

a)

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 + 2)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 - 4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow \text{Crecimiento} \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$\frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -2 < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} / x > 0 \\ (x^2 + 1)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

| | | | |
|-------------------|-----------|-------------|-----------------|
| | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $-2 < 0$ | (-) | (-) | |
| $x > 0$ | (-) | (+) | |
| $(x^2 + 1)^2 < 0$ | (+) | (+) | |
| Solución | (+) | $f'(x) > 0$ | (-) $f'(x) < 0$ |

Crecimiento $\forall x \in \mathbb{R} / x < 0$

Decrecimiento $\forall x \in \mathbb{R} / x > 0$

b)

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{(x^2 + 1)^2 - 2(x^2 + 1) \cdot 2xx}{(x^2 + 1)^4} = -2 \cdot \frac{(x^2 + 1) - 4x^2}{(x^2 + 1)^3} = -2 \cdot \frac{x^2 + 1 - 4x^2}{(x^2 + 1)^3} = -2 \cdot \frac{1 - 3x^2}{(x^2 + 1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 1 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{1}{3} + 2}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{7}{4} \\ x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1} = \frac{\frac{1}{3} + 2}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{7}{4} \end{cases}$$

Continuación Ejercicio 1.- Opción A

c)

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow \text{No existe solución} \Rightarrow \text{No existen asíntotas verticales}$$

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 + \frac{2}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1 + 0}{1 + 0} = 1$$

Asíntota horizontal $y = 1$ cuando $x \rightarrow \infty$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 + \frac{2}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1 + 0}{1 + 0} = 1$$

Asíntota horizontal $y = 1$ cuando $x \rightarrow -\infty$

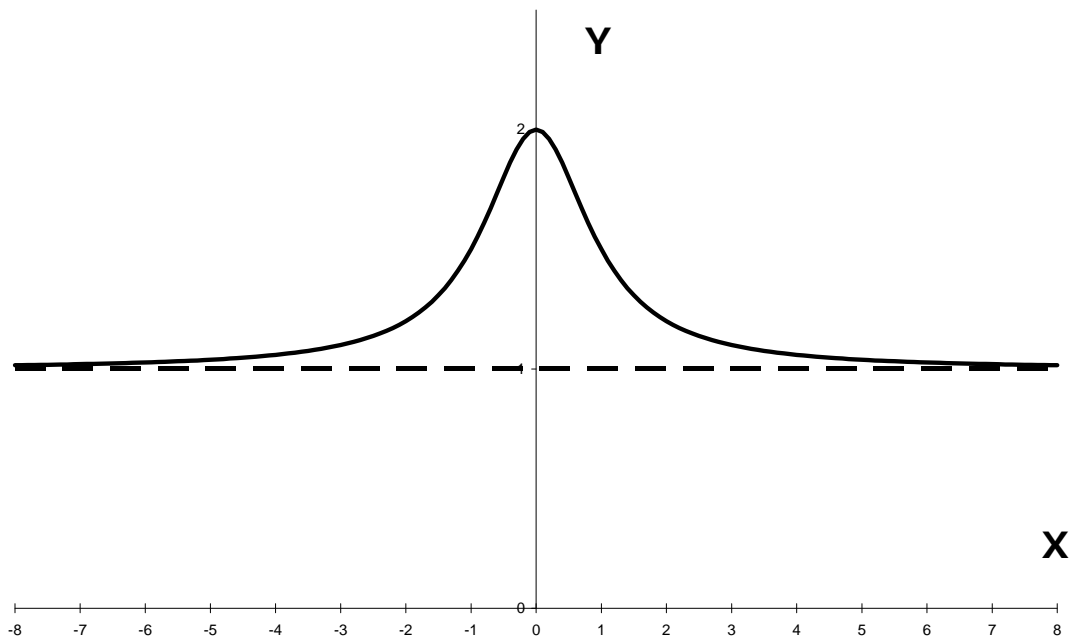
Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x^3 + x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^3} + \frac{2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\infty} + \frac{2}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{0}{1} = 0$$

No existe cuando $x \rightarrow \infty$

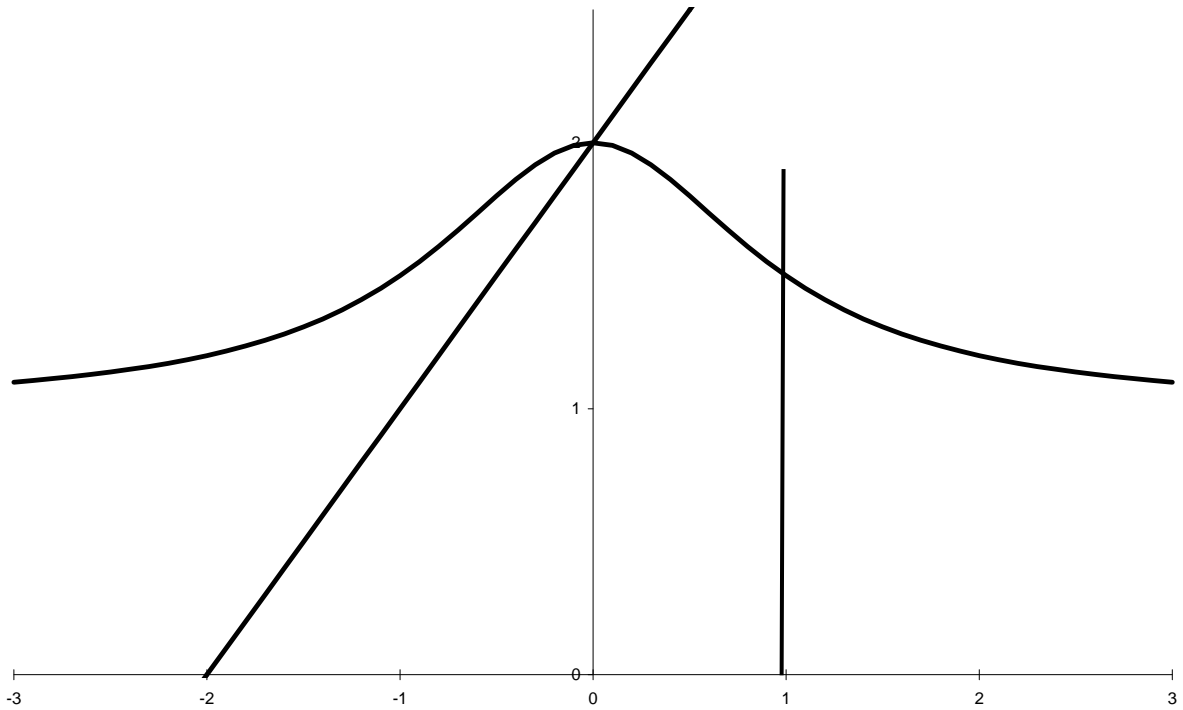
$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{-x^3 - x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3} + \frac{2}{x^3}}{-\frac{x^3}{x^3} - \frac{x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}}{-1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\infty} + \frac{2}{\infty}}{-1 - \frac{1}{\infty}} = \frac{0}{-1} = 0$$

No existe cuando $x \rightarrow -\infty$



Continuación Ejercicio 1.- Opción A

d)



$$\int \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} dx = \int x dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = x + \text{arc tg } x$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 2 \\ \underline{x^2 + 1} \\ -x^2 - 1 \\ \underline{-x^2 - 1} \\ 1 \end{array}$$

$$A = \int_{-2}^0 (x + 2) dx + \int_0^1 \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \cdot [x^2]_{-2}^0 + 2 \cdot [x]_{-2}^0 + [x]_0^1 + [\text{arc tg } x]_0^1$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot [0^2 - (-2)^2] + 2 \cdot [0 - (-2)] + (1 - 0) + (\text{arc tg } 1 - \text{arc tg } 0) = -2 + 4 + 1 + \frac{\pi}{4} = \left(3 + \frac{\pi}{4} \right) dx$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

Dadas la rectas: $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{-1}$, $s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$, se pide:

a) (2 puntos). Determinar la ecuación de la recta perpendicular a r y s

b) (1 punto). Calcular la mínima distancia entre las rectas r y s

a) Se supone que las rectas se cruzan; toda recta t que se apoya en las dos dadas tiene como vector director la diferencia entre los puntos de ambas. Como además es perpendicular a las dos los productos escalares de esta con los vectores directores de las rectas es, en ambos casos, nulo

$$\left\{ \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = -4 - \lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = \mu \\ z = 4\mu \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \vec{v}_t = (2\lambda - \mu, 1 + 3\lambda - \mu, -4 - \lambda - 4\mu) \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_t \perp \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_t \cdot \vec{v}_r = 0 \\ \vec{v}_t \perp \vec{v}_s \Rightarrow \vec{v}_t \cdot \vec{v}_s = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (2\lambda - \mu, 1 + 3\lambda - \mu, -4 - \lambda - 4\mu) \cdot (2, 3, -1) = 0 \\ (2\lambda - \mu, 1 + 3\lambda - \mu, -4 - \lambda - 4\mu) \cdot (1, 1, 4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda - 2\mu + 3 + 9\lambda - 3\mu + 4 + \lambda + 4\mu = 0 \\ 2\lambda - \mu + 1 + 3\lambda - \mu - 16 - 4\lambda - 16\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 14\lambda - \mu + 7 = 0 \\ \lambda - 18\mu - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -252\lambda + 18\mu - 126 = 0 \\ \lambda - 18\mu - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow -251\lambda - 141 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{141}{251}$$

$$\begin{cases} 14\lambda - \mu + 7 = 0 \\ -14\lambda + 252\mu + 210 = 0 \end{cases} \Rightarrow 251\mu + 217 = 0 \Rightarrow \mu = -\frac{217}{251}$$

$$\vec{v}_t = \left[2 \cdot \left(-\frac{141}{251}\right) - \left(-\frac{217}{251}\right), 1 + 3 \cdot \left(-\frac{141}{251}\right) - \left(-\frac{217}{251}\right), -4 - \left(-\frac{141}{251}\right) - 4 \cdot \left(-\frac{217}{251}\right) \right]$$

$$\vec{v}_t = \left[\left(-\frac{282}{251}\right) + \frac{217}{251}, 1 + \left(-\frac{423}{251}\right) + \frac{217}{251}, -4 + \frac{141}{251} + \frac{868}{251} \right] \Rightarrow$$

$$\vec{v}_t = \left[-\frac{65}{251}, \frac{251 - 423 + 217}{251}, \frac{-1004 + 1009}{251} \right] \Rightarrow \vec{v}_t = \left(-\frac{65}{251}, \frac{45}{251}, \frac{5}{251} \right) \equiv (-13, 9, 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \cdot \left(-\frac{141}{251}\right) = -\frac{282}{251} \\ y = 1 + 3 \cdot \left(-\frac{141}{251}\right) = -\frac{172}{251} \\ z = -4 - \left(-\frac{141}{251}\right) = -\frac{863}{251} \end{array} \right. \\ S \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{217}{251} \\ y = -\frac{217}{251} \\ z = 4 \cdot \left(-\frac{217}{251}\right) = -\frac{868}{251} \end{array} \right. \end{array} \right. \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = -\frac{282}{251} - 13\beta \\ y = -\frac{172}{251} + 9\beta \\ z = -\frac{863}{251} + \beta \end{cases}$$

Continuación Ejercicio 2.- Opción A

b)

$$d_{rs} = d_{RS} = \sqrt{\left(-\frac{282}{251} + \frac{217}{251}\right)^2 + \left(-\frac{172}{251} + \frac{217}{251}\right)^2 + \left(-\frac{863}{251} + \frac{868}{251}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{65}{251}\right)^2 + \left(\frac{45}{251}\right)^2 + \left(\frac{5}{251}\right)^2} \Rightarrow$$

$$d_{rs} = \sqrt{\frac{4225 + 2025 + 25}{251^2}} = \frac{\sqrt{6275}}{251} = \frac{\sqrt{25 \cdot 251}}{251} = \frac{5 \cdot \sqrt{251}}{251} u$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

Dado el sistema homogéneo de ecuaciones
$$\begin{cases} x + ky - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ x - 4y + kz = 0 \end{cases}$$
 se pide:

a) (1 punto). Determinar para que valores del parámetro **k** el sistema tiene soluciones distintas de **x = y = z = 0**

b) (1 punto). Resolverlo para el caso **k = 3**

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & k \end{vmatrix} = -k + 2k + 8 - 1 + 8 - 2k^2 = -2k^2 + k + 15 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow -2k^2 + k + 15 = 0 \Rightarrow$$

$$2k^2 - k - 15 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-15) = 1 + 120 = 121 > 0 \Rightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 2} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1+11}{4} = 3 \\ k = \frac{1-11}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

La solución no es la trivial ($x = y = z = 0$) cuando $\begin{cases} k = 3 \\ k = \frac{5}{2} \end{cases}$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 0 \\ 2 & -1 & 2 & | & 0 \\ 1 & -4 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 0 \\ 0 & -7 & 4 & | & 0 \\ 0 & -7 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 0 \\ 0 & -7 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -7y + 4z = 0 \Rightarrow 7y = 4z \Rightarrow y = \frac{4}{7}z \Rightarrow$$

$$x + 3 \cdot \frac{4}{7}z - z = 0 \Rightarrow x + \frac{12-7}{7}z = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{7}z \Rightarrow \text{Solución} \left(-\frac{5}{7}\lambda, \frac{4}{7}\lambda, \lambda \right)$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide

a) (1 punto). Hallar dos constantes a , b tales que $A^2 = aA + bI$

b) (1 punto). Sin calcular explícitamente A^3 y A^4 , y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^5

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \\ aA + bI = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ a & -2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + b = 2 \\ a = -1 \\ a = -1 \\ -2a + b = 5 \end{array} \right. \Rightarrow -1 + b = 2 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow$$

$$-2 \cdot (-1) + 3 = 5 \Rightarrow \text{Compatible det er min ado} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 3 \end{array} \right. \Rightarrow A^2 = -A + 3I$$

b)

$$A^4 = (-A + 3I)^2 = A^2 + 9I^2 - 6AI = A^2 - 6A + 9I = -A + 3I - 6A + 9I = -7A + 12I$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = (-7A + 12I) \cdot A = -7A^2 + 12IA = -7 \cdot (-A + 3I) + 12A = 7A - 21I + 12A = 19A - 21I$$

$$A^5 = 19 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 21 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 19 \\ 19 & -38 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 19 \\ 19 & -59 \end{pmatrix}$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} \ln x}{2^x} & , \text{ si } x > 0 \\ x + k & , \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$ donde **ln x** significa logaritmo neperiano

de **x**, se pide:

a) (1 punto). Determinar el valor de **k** para que la función sea continua en \mathfrak{R}

b) (1 punto). Hallar los puntos de corte con los ejes coordenados

c) (1 punto). Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa **x = 1**

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\sqrt{0} \cdot \ln 0}{2^0} = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{2^x \cdot \ln 2 \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2^x} \quad (1) \\ f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + k = k \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{De (1)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2^x \cdot \ln 2 \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2^x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{2 \cdot 2^x \cdot \ln 2 \cdot x - 2^x}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{2^x (2 \cdot \ln 2 \cdot x - 1)} = \\ &= \frac{2\sqrt{0}}{2^0 (2 \cdot \ln 2 \cdot 0 - 1)} = \frac{0}{1(0-1)} = \frac{0}{-1} = 0 \Rightarrow \text{Como } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = k = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow k = 0 \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} \ln x}{2^x} & , \text{ si } x > 0 \\ x & , \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

b)

Punto de corte con OY

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$$

Punto de corte con OX

$$\text{Cuando } f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{\sqrt{x} \cdot \ln x}{2^x} \Rightarrow \sqrt{x} \cdot \ln x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0) \\ \ln x = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1 \Rightarrow (1, 0) \end{cases} \\ x = 0 \Rightarrow (0, 0) \end{cases}$$

Continuación del Ejercicio 1 de la Opción B

c)

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x}\right) \cdot 2^x - 2^x \cdot \ln 2 \cdot \sqrt{x} \ln x}{2^{2x}} = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \ln 2 \cdot \sqrt{x} \ln x\right) \cdot 2^x}{2^{2x}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x}}{2x} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \ln 2 \cdot \sqrt{x} \ln x}{2^x} = \frac{\sqrt{x} \cdot \left(\frac{\ln x}{2x} + \frac{1}{x} - \ln 2 \cdot \ln x\right)}{2^x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = \frac{\sqrt{1} \cdot \ln 1}{2^1} = \frac{1 \cdot 0}{2} = 0 \\ f'(1) = \frac{\sqrt{1} \cdot \left(\frac{\ln 1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{1} - \ln 2 \cdot \ln 1\right)}{2^1} = \frac{1 \cdot \left(\frac{0}{2} + 1 - \ln 2 \cdot 0\right)}{2} = \frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2} \cdot (x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot (x - 1)$$

$$2y = x - 1 \Rightarrow x - 2y - 1 = 0$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

Dado el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x + ay - z = a \\ ax + 2z = -2 \\ x + z = -2 \end{cases}$$
 se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro **a**

b) (1 punto). Resolverlo en el caso **a = 0**

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2a - a^2 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow 2a - a^2 = 0 \Rightarrow a \cdot (2 - a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 2 - a = 0 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{0, 2\} = \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Si $a = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Si $a = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -6 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -6 \\ 0 & 4 & -4 & 8 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b)

Si $a = 0$ $2z = -2$ $z = -1$ $x - (-1) = 0$ $x = -1$ Solución $(-1, b, -1)$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

Dado las rectas : $r \equiv x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$, $s \equiv \begin{cases} x+z=3 \\ 2x-y=2 \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación del plano π determinado por r y s

b) (1 punto). Hallar la distancia del punto $A(0, 1, -1)$ a la recta s

a) Para que r y s generen un plano tienen que ser paralelas, sus vectores directores proporcionales o iguales, o cortarse en un punto, en este caso los vectores directores no son proporcionales.

$$\left\{ \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 2, -1) \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} z = 3 - x \\ y = 2x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \mu \\ y = -2 + 2\mu \Rightarrow \vec{v}_s = (1, 2, -1) \quad (1) \\ z = 3 - \mu \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{v}_s \Rightarrow \text{Son paralelas}$$

Analizado su paralelismo, para generar el plano π utilizaremos el vector director de las dos, el vector formado por dos puntos R y S , uno de cada recta y el vector genérico formado por uno de los puntos R y el punto que genera al plano G , el determinante formado por ellos, al ser coplanarios, es nulo y es la ecuación del plano pedido.

$$\text{Siendo } \begin{cases} R(0, 1, -1) \\ S(0, -2, 3) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{v}_s = (1, 2, -1) \\ \vec{RS} = (0, -2, 3) - (0, 1, -1) = (0, -3, 4) \\ \vec{RG} = (x, y, z) - (0, 1, -1) = (x, y-1, z+1) \end{array} \right. \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$8x - 3 \cdot (z+1) - 3x - 4 \cdot (y-1) = 0 \Rightarrow 5x - 4 \cdot (y-1) - 3 \cdot (z+1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 5x - 4y - 3z + 1 = 0$$

Continuación del Ejercicio 3 Opción B

b) Crearemos un plano π_l que contenga al punto **A** y que sea perpendicular a la recta **s**, su vector director es el de la recta que es perpendicular al vector generador del plano formado por el punto **A** y el genérico **G**. Posteriormente hallaremos el punto **B** de corte del plano π_l y la recta **s**, siendo la distancia pedida la que hay entre este punto **B** y el **A**

$$\text{Siendo } \begin{cases} \vec{v}_r = \vec{v}_{\pi_l} = (1, 2, -1) \\ \vec{RA} = (x, y, z) - (0, 1, -1) = (x, y-1, z+1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{\pi_l} \perp \vec{RA} \Rightarrow \vec{v}_{\pi_l} \cdot \vec{RA} = 0$$

$$(1, 2, -1) \cdot (x, y-1, z+1) = 0 \Rightarrow x + 2(y-1) - (z+1) = 0 \Rightarrow \pi_l \equiv x + 2y - z - 3 = 0$$

Punto de corte B

$$\text{De (1)} \Rightarrow \mu + 2(-2 + 2\mu) - (3 - \mu) - 3 = 0 \Rightarrow \mu - 4 + 4\mu - 3 + \mu - 3 = 0 \Rightarrow 6\mu - 10 \Rightarrow \mu = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \Rightarrow$$

$$B \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = -2 + 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{4}{3} \\ z = 3 - \frac{5}{3} = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \Rightarrow d(A, s) = d(AB) = \sqrt{\left(0 - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(-1 - \frac{4}{3}\right)^2}$$

$$d(A, s) = \sqrt{\left(-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{7}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{25 + 1 + 49}{9}} = \frac{\sqrt{75}}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3} u$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

Sea el plano π que contiene a los puntos: **P** = (1, 0, 0), **Q** = (0, 2, 0) y **R** = (0, 0, 3). Se pide:

- (1 punto). Hallar el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos **P**, **Q** y **R**
- (1 punto). Calcular las coordenadas del punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π

$$\begin{cases} \vec{PO} = (1, 0, 0) - (0, 0, 0) = (1, 0, 0) \\ \vec{QO} = (0, 2, 0) - (0, 0, 0) = (0, 2, 0) \\ \vec{RO} = (0, 0, 3) - (0, 0, 0) = (0, 0, 3) \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot |\vec{PO} \cdot (\vec{QO} \times \vec{RO})| = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1 u^3$$

Continuación del Ejercicio 3 de la Opción B

b) Generamos una recta r que pasando por O sea perpendicular al plano π , que tenemos que hallar, siendo su vector director el del plano. Se halla el punto de corte S de la recta y el plano y que es el punto medio entre O y O'

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (0, 2, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 2, 0) \\ \overrightarrow{PR} = (0, 0, 3) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 3) \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (1, 0, 0) = (x-1, y, z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6 \cdot (x-1) + 2z + 3y = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 6x + 3y + 2z - 6 = 0$$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = v_\pi = (6, 3, 2) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

Punto de corte S

$$6 \cdot 6\lambda + 3 \cdot 3\lambda + 2 \cdot 2\lambda - 6 = 0 \Rightarrow 36\lambda + 9\lambda + 4\lambda - 6 = 0 \Rightarrow 49\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{6}{49} \Rightarrow S \begin{cases} x = 6 \cdot \frac{6}{49} = \frac{36}{49} \\ y = 3 \cdot \frac{6}{49} = \frac{18}{49} \\ z = 2 \cdot \frac{6}{49} = \frac{12}{49} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{36}{49} = \frac{0 + x_{O'}}{2} \Rightarrow x_{O'} = \frac{2 \cdot 36}{49} = \frac{72}{49} \\ \frac{18}{49} = \frac{0 + y_{O'}}{2} \Rightarrow y_{O'} = \frac{2 \cdot 18}{49} = \frac{36}{49} \\ \frac{12}{49} = \frac{0 + z_{O'}}{2} \Rightarrow z_{O'} = \frac{2 \cdot 12}{49} = \frac{24}{49} \end{cases} \Rightarrow O' \left(\frac{72}{49}, \frac{36}{49}, \frac{24}{49} \right)$$