

OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

a) (1 punto). Calcular el rango de **A** en función de los valores de **a**

b) (1 punto). En el caso **a = 2**, discutir el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ en función de los valores de **b**, y

resolverlo cuando sea posible

c) (1 punto). En el caso **a = 1**, resolver el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a^3 + 4 - a^2 - 2a^3 + 2a - 2a = 4 - a^2 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow 4 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow$$

$$a = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} - \{-2, 2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

Si $a = -2$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

Si $a = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

b)

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & | & 2 \\ -1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 2 & 1 & 2 & | & b \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & | & 2 \\ -4 & 8 & -4 & | & 4 \\ -4 & -2 & -4 & | & -2b \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & | & 2 \\ 0 & 6 & 0 & | & 6 \\ 0 & -4 & 0 & | & -2b \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{b}{2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & \frac{b}{2} - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Compatible Indeter min ado} \Rightarrow \frac{b}{2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{b}{2} = 1 \Rightarrow b = 2$$

Cuando $b = 2 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeter min ado $\Rightarrow y = 1 \Rightarrow 4x - 2 + 4z = 2 \Rightarrow 4x = -4z + 4$

Solución $(1 - \lambda, 1, \lambda)$

Cuando $b \neq 2 \Rightarrow$ Sistema Incompatible

Continuación del Ejercicio 1 de la Opción A

c)

El sistema es compatible det er min ado \Rightarrow Utilizando Cramer

$$|A| = 4 - 1^2 = 3 \Rightarrow$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-1+4+2-2-1+4}{3} = \frac{6}{3} = 2 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{4+2-2-4+4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{4-8+1+2-4-4}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

a) (1'5 puntos). Hallar el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres

vértices en las intersecciones de las rectas $r_1 \equiv x = y = z$, $r_2 \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, $r_3 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ con elplano $\pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24$ b) (1'5 puntos). Hallar la recta s que corta perpendicularmente a las rectas

$$r_4 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-2} \quad r_5 \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

a)

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \text{Punto de corte} \Rightarrow 2\lambda + 3\lambda + 7\lambda = 24 \Rightarrow 12\lambda = 24 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow A \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow A(2, 2, 2)$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Punto de corte} \Rightarrow 2\alpha + 3 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 24 \Rightarrow 2\alpha = 24 \Rightarrow \alpha = 12 \Rightarrow B \begin{cases} x = 12 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow B(12, 0, 0)$$

$$r_3 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \beta \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Punto de corte} \Rightarrow 2 \cdot 0 + 3\beta + 7 \cdot 0 = 24 \Rightarrow 3\beta = 24 \Rightarrow \beta = 8 \Rightarrow C \begin{cases} x = 0 \\ y = 8 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow C(0, 8, 0)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (2, 2, 2) - (0, 0, 0) = (2, 2, 2) \\ \overrightarrow{OB} = (12, 0, 0) - (0, 0, 0) = (12, 0, 0) \\ \overrightarrow{OC} = (0, 8, 0) - (0, 0, 0) = (0, 8, 0) \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 192 = 32 u^3$$

Continuación del Ejercicio 2 de la Opción A

$$\left\{ \begin{array}{l} r_4 \equiv \begin{cases} x = -1 + a \\ y = 5 + 2a \\ z = -1 - 2a \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{r_4} = (1, 2, -2) \\ r_5 \equiv \begin{cases} x = 2b \\ y = -1 + 3b \\ z = 1 - b \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{r_5} = (2, 3, -1) \end{array} \right. \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{2}{3} \Rightarrow \text{No son paralelas ni coincidentes}$$

Veamos si tienen un punto de corte común

$$\begin{cases} -1 + a = 2b \\ 5 + 2a = -1 + 3b \\ -1 - 2a = 1 - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 2b = 1 \\ 2a - 3b = -6 \\ 2a - b = -2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & -6 \\ 2 & -1 & -2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 3 & -4 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 20 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Incompatible}$$

Se cruzan las dos rectas

$$\begin{aligned} \vec{v}_s &= [-1 + a - 2b, 5 + 2a - (-1 + 3b), -1 - 2a - (1 - b)] = (a - 2b - 1, 2a - 3b + 6, -2a + b - 2) \Rightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_s \perp \vec{v}_{r_4} \Rightarrow \vec{v}_s \cdot \vec{v}_{r_4} = 0 \Rightarrow (a - 2b - 1, 2a - 3b + 6, -2a + b - 2) \cdot (1, 2, -2) = 0 \\ \vec{v}_s \perp \vec{v}_{r_5} \Rightarrow \vec{v}_s \cdot \vec{v}_{r_5} = 0 \Rightarrow (a - 2b - 1, 2a - 3b + 6, -2a + b - 2) \cdot (2, 3, -1) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \\ \begin{cases} a - 2b - 1 + 4a - 6b + 12 + 4a - 2b + 4 = 0 \Rightarrow 9a - 10b + 15 = 0 \\ 2a - 4b - 2 + 6a - 9b + 18 + 2a - b + 2 = 0 \Rightarrow 10a - 14b + 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 9 & -10 & -15 \\ 10 & -14 & -18 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 9 & -10 & -15 \\ -90 & 126 & 162 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc|c} 9 & -10 & -15 \\ 0 & 26 & 12 \end{array} \right) \Rightarrow 26b = 12 \Rightarrow b = \frac{12}{26} = \frac{6}{13} \Rightarrow 9a - \frac{60}{13} = -15 \Rightarrow 9a = \frac{60}{13} - 15 \Rightarrow 9a = \frac{60 - 195}{13} = -\frac{135}{13} \\ a = -\frac{15}{13} \Rightarrow \vec{v}_s = \left(-\frac{15}{13} - \frac{12}{13} - 1, -\frac{30}{13} - \frac{18}{13} + 6, \frac{30}{13} + \frac{6}{13} - 2 \right) \Rightarrow \vec{v}_s = \left(-\frac{40}{13}, \frac{30}{13}, \frac{10}{13} \right) \equiv (-4, 3, 1) \\ \text{Punto de la recta } s \Rightarrow S \begin{cases} x = 2 \cdot \frac{6}{13} = \frac{12}{13} \\ y = -1 + 3 \cdot \frac{6}{13} = \frac{5}{13} \\ z = 1 - \frac{6}{13} = \frac{7}{13} \end{cases} \Rightarrow \text{Ecuación de la recta pedida } s \begin{cases} x = \frac{12}{13} - 4c \\ y = \frac{5}{13} + 3c \\ z = \frac{7}{13} + c \end{cases} \end{aligned}$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

a) (1 punto). Calcular la integral $\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2} dx$

b) (1 punto). Hallar los valores máximo y mínimo absoluto de la función $f(x) = \sqrt{12-3x^2}$

a)

$$\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2} dx = \int_3^7 t \cdot \frac{1}{5} t dt = \frac{1}{5} \int_3^7 t^2 dt = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot [t^3]_3^7 = \frac{1}{15} \cdot (7^3 - 3^3) = \frac{1}{15} \cdot (343 - 27) = \frac{316}{15}$$

$$4+5x^2 = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{4+5x^2} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow t=3 \\ x=3 \Rightarrow t=7 \end{cases} \Rightarrow 10x dx = 2t dt \Rightarrow x dx = \frac{1}{5} t dt$$

b)

$$12-3x^2 \geq 0 \Rightarrow 3(4-x^2) \geq 0 \Rightarrow 3 \cdot (2+x) \cdot (2-x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 2+x > 0 \Rightarrow x > -2 \\ 2-x > 0 \Rightarrow -x > -2 \Rightarrow x < 2 \end{cases}$$

$x < -2$	(+)	(+)	(-)
$x > 2$	(-)	(+)	(+)
Solución	(-)	(+)	(-)

$$Dom(f) = \forall x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 2$$

$$f'(x) = \frac{-6x}{2\sqrt{12-3x^2}} = -\frac{3x}{\sqrt{12-3x^2}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \sqrt{12-3 \cdot 0^2} = 2\sqrt{3}$$

$$f''(x) = -3 \frac{\sqrt{12-3x^2} - \frac{-3x}{\sqrt{12-3x^2}} \cdot x}{12-3x^2} = -3 \frac{12-3x^2+3x^2}{\sqrt{12-3x^2}(12-3x^2)} = -\frac{36}{(12-3x^2)\sqrt{12-3x^2}}$$

$$f''(0) = -\frac{36}{(12-3 \cdot 0^2)\sqrt{12-3 \cdot 0^2}} = -\frac{36}{12\sqrt{12}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{Máximo relativo}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{12-3x^2} = \sqrt{12-3(-2)^2} = \sqrt{12-12} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{12-3x^2} = \sqrt{12-3 \cdot 2^2} = \sqrt{12-12} = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < 2\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} \text{Máximo absoluto} \Rightarrow (0, 2\sqrt{3}) \\ \text{Mínimo absoluto} \Rightarrow \begin{cases} (-2, 0) \\ (2, 0) \end{cases} \end{cases}$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

a) (1 punto). Calcular el siguiente límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$

b) (1 punto). Demostrar que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$, sólo tiene una raíz real, cualquiera que sea el número m . Justificar la respuesta indicando qué teorema se usan.

a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\infty}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0}} = 1$$

b)

$Dom(f) = (Toda) \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Es continua en todo su recorrido de $-\infty$ a $+\infty$

Estudiemos los valores en los extremos del intervalo $(-\infty, +\infty)$

$$f(x) = 4x^5 + 3x + m = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4 \cdot \infty^5 + 3 \cdot \infty + m = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4 \cdot (-\infty)^5 + 3 \cdot (-\infty) + m = -\infty \\ f'(x) = 5x^4 + 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = 20x^4 + 3 \Rightarrow \text{Creciente} \Rightarrow 20x^4 + 3 > 0 \Rightarrow 20x^4 > -3 \Rightarrow x^4 > \frac{-3}{20} \Rightarrow x > \sqrt[4]{-\frac{3}{20}} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow$$

Es creciente para toda x real

Teoremas de Rolle y Bolzano

Esta función es continua en toda la recta real, siéndolo, por lo tanto, en el intervalo $(-\infty, +\infty)$; como además toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, aplicando el teorema de Bolzano sabemos que existe, al menos un punto $c \in (-\infty, +\infty)$ tal que $f(c) = 0$, y ese punto es único cuando hemos demostrado que es creciente en ese intervalo y por lo tanto no hay extremos relativos

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Calificación máxima: 3 puntos

Dada la función: $f(x) = \frac{ax^4 + 1}{x^3}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en $x = 1$. Para ese valor de a obtener los otros puntos en que f tiene extremos relativos

b) (1 punto). Obtener las asíntotas de la gráfica $y = f(x)$ para $a = 1$

c) (1 punto). Esbozar la gráfica de la función para $a = 1$

a)

$$f'(x) = \frac{4ax^3 - 3x^2(ax^4 + 1)}{x^6} = \frac{4ax^4 - 3(ax^4 + 1)}{x^4} = \frac{4ax^4 - 3ax^4 - 3}{x^4} = \frac{ax^4 - 3}{x^4} \Rightarrow$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow a \cdot 1^4 - 3 = 0 \Rightarrow a - 3 = 0$$

$$f'(x) = \frac{3x^4 - 3}{x^4} = 3 \cdot \frac{x^4 - 1}{x^4} = 3 \cdot \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^4} = 3 \cdot \frac{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}{x^4} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3} \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow f(x) = \frac{0^4 + 1}{0^3} = \frac{1}{0} \Rightarrow$$

$$\text{En } x = 0 \Rightarrow \text{Asíntota vertical en } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^4}{x^4} + \frac{1}{x^4}}{\frac{x^3}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x}} = \frac{1 + \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{1 + 0}{0} = \frac{1}{0} \Rightarrow \text{No existe} \Rightarrow x \rightarrow \infty$$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 1}{-x^3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^4}{x^4} + \frac{1}{x^4}}{\frac{-x^3}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^4}}{\frac{-1}{x}} = \frac{1 + \frac{1}{\infty}}{\frac{-1}{\infty}} = \frac{1}{-\frac{1}{\infty}} = -\frac{1}{0} \Rightarrow \text{No existe} \Rightarrow x \rightarrow -\infty$$

Continuación de la Ejercicio 1 de la Opción B

b) Continuación

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^4}{x^4} + \frac{1}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^4}}{1} = \frac{1 + \frac{1}{\infty}}{1} = \frac{1 + 0}{1} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^4 + 1}{x^3} - 1 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1 - x^4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{\infty} = 0$$

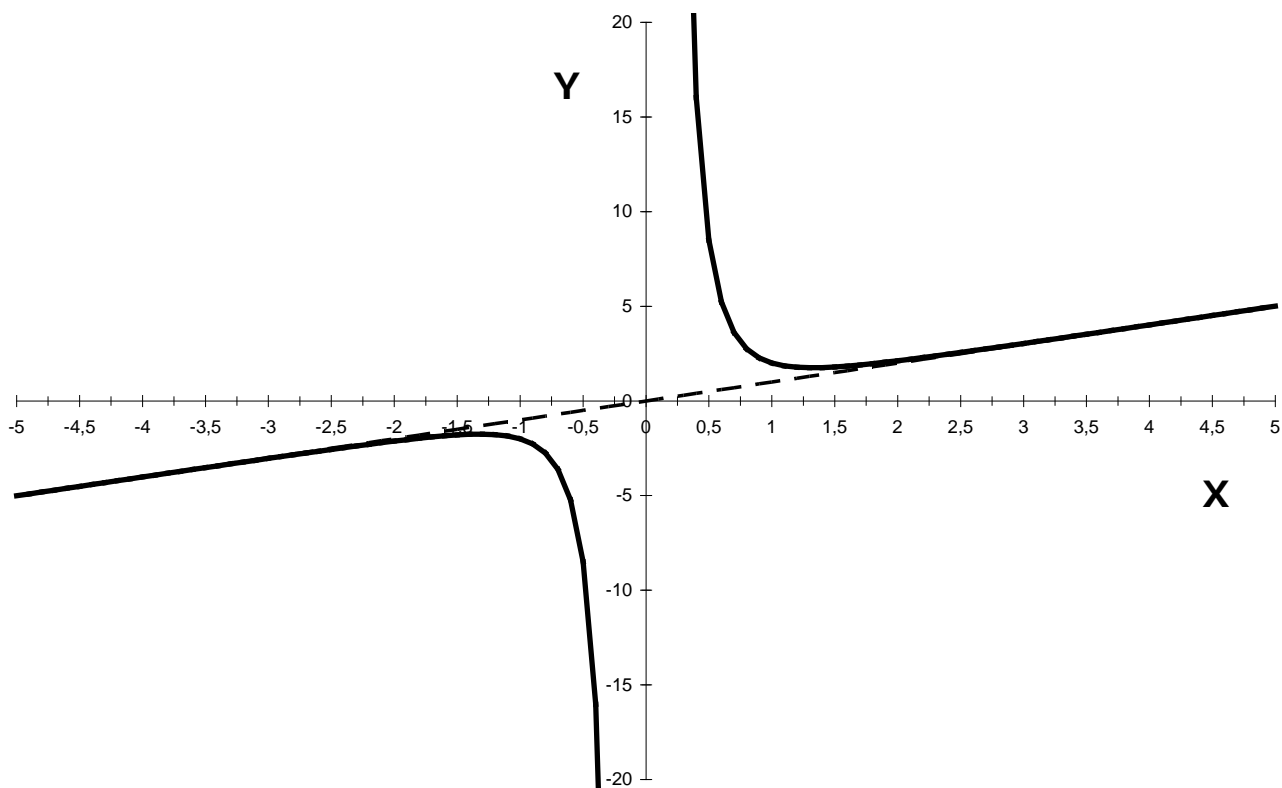
Asíntota oblicua $\Rightarrow y = x$ cuando $x \rightarrow \infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 1}{x^4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^4}{x^4} + \frac{1}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^4}}{1} = \frac{1 + \frac{1}{\infty}}{1} = \frac{1 + 0}{1} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^4 + 1}{x^3} - 1 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 1 - x^4}{-x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x^3} = -\frac{1}{\infty} = 0$$

Asíntota oblicua $\Rightarrow y = x$ cuando $x \rightarrow -\infty$

c)



Ejercicio 2.- Calificación máxima: 3 puntos

a) (2 puntos). Discutir el sistema de ecuaciones $AX = B$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m-1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m+2 \end{pmatrix}, \text{ según los valores de } m$$

b) (1 punto). Resolver los sistemas en los casos $m = 0$ y $m = 1$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & m-1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (m-2) - (m-1)^2(m-2) = [1 - (m-1)^2](m-2) = [1 - (m^2 - 2m + 1)](m-2)$$

$$|A| = (1 - m^2 + 2m - 1)(m-2) = (-m^2 + 2m)(m-2) = m(2-m)(m-2) = -m(m-2)(m-2) = -m(m-2)^2$$

$$\text{Si } |A| = 0 \Rightarrow -m(m-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m-2 = 0 \Rightarrow m = 2 \end{cases}$$

$\forall m \in \mathbb{R} - \{0, 2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Si $m = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 0z = 4 \Rightarrow z = \frac{4}{0} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $m = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ -2 & 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ -2 & 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 0z = 0 \Rightarrow z = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b)

Si $m = 0$

$$-2x = 2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y - z = 0 \Rightarrow y = z \Rightarrow \text{Solución } (-1, \lambda, \lambda)$$

Si $m = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ -1 & 0 & 0 & | & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow -x = 3 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow \text{Solución } (-3, 1, 1)$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima: 2 puntos

Dado los planos : $\pi_1 \equiv 2x + y - 2z = 1$, $\pi_2 \equiv x - y + 2z = 1$, se pide:

a) (0'5 puntos). Estudiar su posición relativa

b) (1'5 puntos). En caso de que sean paralelos hallar la distancia entre ellos; en caso de que se corten, hallar un punto y un vector de dirección de la recta que determinan.

a) **O son paralelos o se cortan según una recta intersección de ambos. Si son paralelos sus vectores directores son iguales o proporcionales**

$$\begin{cases} v_{\pi_1} = (2, 1, -2) \\ v_{\pi_2} = (1, -1, 2) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} \Rightarrow \text{Se cortan} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

Recta de encuentro

$$\frac{2}{3} - y + 2z = 1 \Rightarrow y = \frac{2}{3} - 1 + 2z \Rightarrow y = -\frac{1}{3} + 2z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Punto } R\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right) \\ \vec{v}_r = (0, 2, 1) \end{cases}$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima: 2 puntos

a) (0'75 puntos). Hallar la ecuación del plano π_1 que pasa por los puntos **A(1, 0, 0)**, **B(0, 2, 0)** y **C(0, 0, 1)**,

b) (0'75 puntos). Hallar la ecuación del plano π_2 que contiene al punto **P(1, 2, 3)** y es perpendicular al vector $\vec{v}(-2, 1, 1)$

c) (0'5 puntos). Hallar el volumen del tetraedro de vértices **A, B, C y P**

a)

$$\begin{cases} \vec{AB} = (0, 2, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 2, 0) \\ \vec{AC} = (0, 0, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 1) \\ \vec{AG} = (x, y, z) - (1, 0, 0) = (x-1, y, z) \end{cases} \Rightarrow \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(x-1) + 2z + y = 0 \Rightarrow$$

$$\pi_1 \equiv 2x + y + 2z - 2 = 0$$

b)

$$\begin{cases} \vec{v} = (-2, 1, 1) \\ \vec{PG} = (x, y, z) - (1, 2, 3) = (x-1, y-2, z-3) \end{cases} \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{PG} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{PG} = 0 \Rightarrow$$

$$(x-1, y-2, z-3) \cdot (-2, 1, 1) = 0 \Rightarrow -2(x-1) + y-2 + z-3 = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv 2x - y - z + 3 = 0$$

Continuación de la Ejercicio 4 de la Opción B

a)

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0, 2, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 2, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 0, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 1) \\ \overrightarrow{AP} = (1, 2, 3) - (1, 0, 0) = (0, 2, 3) \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \cdot \overrightarrow{AP} \Rightarrow$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot (2 + 6) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} u^3$$