OPCIÓN A

Ejercicio 1.- Calificación máxima 3 puntos

Dada la función: $f(x)=\dfrac{4}{x-4}+\dfrac{27}{2x+2}$ se pide

a) **(0'75 puntos)** Hallar las asíntotas de dicha grafica

b) **(1'75 puntos)** Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcular sus puntos de inflexión
c) **(0'5 puntos)** Esbozar la gráfica de la función

$a)$

$$\begin{cases} x-4=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow f(4)=\dfrac{4}{4-4}+\dfrac{27}{2\cdot 4+2}=\dfrac{4}{0}+\dfrac{27}{10} \Rightarrow Sin\ solución \\ 2x+2=0 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow f(-1)=\dfrac{4}{(-1)-4}+\dfrac{27}{2\cdot(-1)+2}=-\dfrac{4}{5}+\dfrac{27}{0} \Rightarrow Sin\ solución \end{cases}$$

$$Dom\,(f)=\forall x \in \Re-\{-1\,,\,4\} \Rightarrow Asíntotas\ verticales \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=4 \end{cases}$$

$Asíntotas\ horizontales$

$$y=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{x-4}+\frac{27}{2x+2}\right)=\frac{4}{\infty}+\frac{27}{\infty}=0+0=0 \Rightarrow Existe\ a\sin tota\ horizontal,\ y=0,cuando\ x\to\infty$$

$$y=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{x-4}+\frac{27}{2x+2}\right)=\frac{4}{-\infty}+\frac{27}{-\infty}=0+0=0 \Rightarrow Existe\ a\sin tota\ horizontal,\ y=0,cuando\ x\to-\infty$$

$Asíntotas\ oblicuas$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\dfrac{4}{x-4}+\dfrac{27}{2x+2}\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{x^2-4x}+\frac{27}{2x^2+2x}\right)=\frac{4}{\infty}+\frac{27}{\infty}=0+0=0 \Rightarrow No\ existe\ a\sin tota\ oblicua$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{x^2-4x}+\frac{27}{2x^2+2x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{x^2+4x}+\frac{27}{2x^2-2x}\right)=\frac{4}{\infty}+\frac{27}{\infty}=0+0=0 \Rightarrow No\ existe\ as.\ oblicua$$

$b)$

$$f(x)=\frac{4}{x-4}+\frac{27}{2\,(x+1)} \Rightarrow f'(x)=-\frac{4}{(x-4)^2}-\frac{27}{2\,(x+1)^2} \Rightarrow f'(x)=-\frac{8\,(x+1)^2+27\,(x-4)^2}{2\,(x+1)^2(x-4)^2}$$

$$f'(x)=-\frac{8\left(x^2+2x+1\right)+27\left(x^2-8x+16\right)}{2\,(x+1)^2(x-4)^2}=-\frac{8x^2+16x+8+27x^2-216x+432}{2\,(x+1)^2(x-4)^2}=-\frac{35x^2-200x+440}{2\,(x+1)^2(x-4)^2}$$

$$f'(x)=-\frac{5}{2}\cdot\frac{7x^2-40x+88}{(x+1)^2(x-4)^2} \Rightarrow 7x^2-40x+88=0 \Rightarrow \Delta=(-40)^2-4\cdot 7\cdot 88=-864\le 0 \Rightarrow Soluc\ imagin.$$

$$Crecimiento \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow -\frac{5}{2}\cdot\frac{7x^2-40x+88}{(x+1)^2(x-4)^2}>0 \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{5}{2}<0 \Rightarrow \forall x\in\Re \\ 7x^2-40x+88>0 \Rightarrow \forall x\in\Re \\ (x+1)^2>0 \Rightarrow \forall x\in\Re \\ (x-4)^2>0 \Rightarrow \forall x\in\Re \end{cases}$$

Continuación del Ejercicio 1 de la Opción A
b) **Continuación**

	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad$ ∞
$-\dfrac{5}{2}<0$	**(-)**
7x^2 - 40x + 88	**(+)**
(x + 1)^2	**(+)**
(x - 4)^2	**(+)**
Solución	**(-)**

Decrecimiento $\forall x \in \Re$

$$f''(x)=\frac{8\,(x-4)}{(x-4)^4}+\frac{27\cdot 2\cdot (x+1)}{2\,(x+1)^4}=\frac{8}{(x-4)^3}+\frac{27}{(x+1)^3}\Rightarrow f''(x)=\frac{8\,(x+1)^3+27\,(x-4)^3}{(x+1)^2(x-4)^2}$$

$$f''(x)=\frac{8\left(x^3+3\cdot x^2\cdot 1+3\cdot x\cdot 1^2+1^3\right)+27\left(x^3-3\cdot x^2\cdot 4+3\cdot x\cdot 4^2-4^3\right)}{(x+1)^2(x-4)^2}$$

$$f''(x)=\frac{8x^3+24x^2+24x+8+27x^3-324x^2+1296x-1728}{(x+1)^2(x-4)^2}=\frac{35x^3-300x^2+1320x-1720}{(x+1)^2(x-4)^2}$$

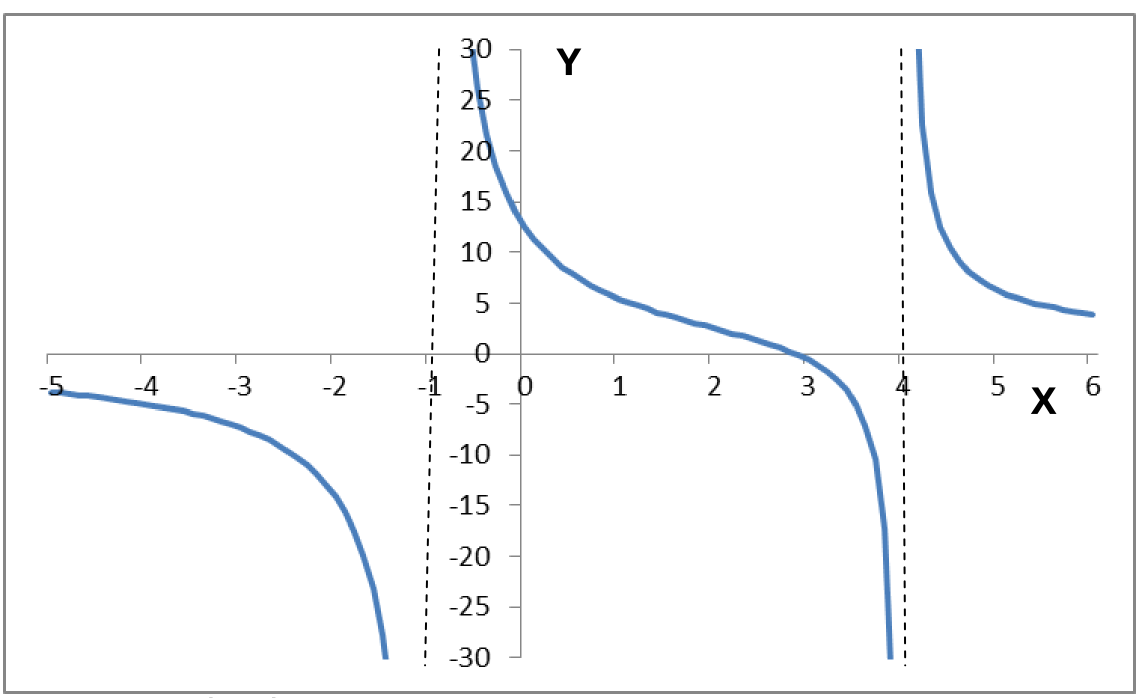
$$f''(x)=5\cdot\frac{7x^3-60x^2+264x-344}{(x+1)^2(x-4)^2}\Rightarrow Punto\ de\ \inf\ lexión\Rightarrow f''(x)=0\Rightarrow 5\cdot\frac{7x^3-60x^2+264x-344}{(x+1)^2(x-4)^2}=0$$

$$7x^3-60x^2+264x-344=0\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} & 7 & -60 & 264 & -344 \\ 2 & & 14 & -92 & 344 \\ \hline & 7 & -46 & 172 & \underline{|0} \end{array}\Rightarrow (x-2)\left(7x^2-46x^2+88\right)=0\Rightarrow$$

$$7x^2-46x^2+88=0\Rightarrow \Delta=(-46)^2-4\cdot 7\cdot 88=2116-2464=-348\leq 0\Rightarrow Solución\ imaginaria$$

$$Punto\ de\ \inf\ lexión\Rightarrow x=2\Rightarrow f(2)=\frac{4}{2-4}+\frac{27}{2\cdot 2+2}=-\frac{4}{2}+\frac{27}{6}=\frac{-12+27}{6}=\frac{25}{6}$$

c)



Ejercicio 2.- Calificación máxima 3 puntos

Dada las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&a&a\\a&1&1&a\\a&a&1&1\\a&a&a&1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ **,** se pide:

a) **(1'5 puntos)** Calcular el determinante de **A**. Determinar el rango de **A** según los valores de **a**
b) **(0'5 puntos)** Resolver el sistema homogéneo **AX = O** en el caso **a = 1**
c) **(1 punto)** Resolver el sistema homogéneo **AX = O** cuando **a = -1**

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&a&a\\a&1&1&a\\a&a&1&1\\a&a&a&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-a^2&1-a^2&a-a^2&0\\a-a^2&1-a^2&1-a^2&0\\0&0&1-a&0\\a&a&a&1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1-a^2&1-a^2&a(1-a)\\a(1-a)&1-a^2&1-a^2\\0&0&1-a\end{vmatrix}=$$

$$|A|=\begin{vmatrix}(1-a)(1+a)&(1-a)(1+a)&a(1-a)\\a(1-a)&(1-a)(1+a)&(1-a)(1+a)\\0&0&1-a\end{vmatrix}=(1-a)\cdot(1-a)\cdot(1-a)\cdot\begin{vmatrix}1+a&1+a&a\\a&1+a&1+a\\0&0&1\end{vmatrix}$$

$$|A|=(1-a)^3\cdot1\cdot\begin{vmatrix}1+a&1+a\\a&1+a\end{vmatrix}=(1-a)^3\cdot(1+a)\cdot\begin{vmatrix}1&1\\a&1+a\end{vmatrix}=(1-a)^3\cdot(1+a)(1+a-a)=(1-a)^3\cdot(1+a)$$

$$Si\ |A|=0\Rightarrow(1-a)^3\cdot(1+a)=0\Rightarrow\begin{cases}1-a=0\Rightarrow a=1\\1+a=0\Rightarrow a=-1\end{cases}\Rightarrow\forall a\in\Re-\{-1,1\}\Rightarrow|A|\neq0\Rightarrow rang\ (A)=4$$

$Si\ a=-1$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\-1&1&1&-1\\-1&-1&1&1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\0&2&0&-2\\0&0&0&0\\0&0&-2&0\end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (A)=3$$

$Si\ a=1$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (A)=1$$

Continuación del Ejercicio 2 de la Opción A

b) Como el rango de la matriz es 1 **menor** que el número de incógnitas, que son 4, el sistema es **Compatible Indeterminado** con infinitos valores de solución

$$Si\ a=1$$

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow x+y+z+w=0\Rightarrow x=-y-z-w\Rightarrow$$

$$Solución\Rightarrow(x\ ,\ y\ ,\ z\ ,\ w)=(-\alpha-\beta-\lambda\ ,\ \alpha\ ,\ \beta\ ,\ \lambda)$$

c) Como el rango de la matriz es 3 **menor** que el número de incógnitas, que son 4, el sistema es **Compatible Indeterminado** con infinitos valores de solución

$$Si\ a=-1$$

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&-1&0\\-1&1&1&-1&0\\-1&-1&1&1&0\\-1&-1&-1&1&0\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&-1&0\\0&2&0&-2&0\\0&0&0&0&0\\0&0&-2&0&0\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&-1&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{array}\right)\Rightarrow z=0\Rightarrow y-w=0\Rightarrow y=w$$

$$x+w-0-w=0\Rightarrow x=0\Rightarrow Solución\Rightarrow(x\ ,\ y\ ,\ z\ ,\ w)=(0\ ,\ \eta\ ,\ 0\ ,\ \eta)$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima 2 puntos

Dado los puntos **A(2 , - 2 , 1)** , **B(0 , 1 , - 2)** , **C(- 2 , 0 , - 4)** , **D(2 , - 6 , 2**), se pide:

a) **(1 punto)** Probar que el cuadrilátero **ABCD** es un trapecio (tiene dos lados paralelos) y hallar la distancia entre los dos lados paralelos

b) **(1 punto)** Hallar el área del triángulo **ABC**

a) Hallaremos los vectores **AB**, **BC**, **CD** y **DA** y estudiaremos los que tengan el vector canónico igual, esos serán los paralelos.

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(0\,,1\,,-2)-(2\,,-2\,,1)=(-2\,,3\,,-3)\equiv(2\,,-3\,,3)\\ \overrightarrow{BC}=(-2\,,0\,,-4)-(0\,,1\,,-2)=(-2\,,-1\,,-2)\equiv(2\,,1\,,2)\\ \overrightarrow{CD}=(2\,,-6\,,2)-(-2\,,0\,,-4)=(4\,,-6\,,6)\equiv(2\,,-3\,,3)\\ \overrightarrow{DA}=(2\,,-2\,,1)-(2\,,-6\,,2)=(0\,,4\,,-1)\end{cases}\Rightarrow$$

Como los lados **AB** y **CD son paralelos** el cuadrilátero **ABCD** es un **trapecio**

La distancia entre dos rectas paralelas es la mínima distancia entre un punto de una de ellas y la otra recta. Para ello escogeremos un punto de la recta **CD**, (tomaremos **C**) por el que haremos pasar un plano π perpendicular a las dos rectas, que tendrá como vector director el de ellas, siendo el producto escalar de ese vector y el vector **CG**, donde **G** es el punto generador del plano, nulo por perpendicularidad y la ecuación buscada del plano, que cortará a la recta **AB** (la denominaremos r) en un punto **P**, la distancia de **C** a **P** es la buscada.

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_\pi}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=(2\,,-3\,,3)\\ \overrightarrow{CG}=(x\ ,\ y\ ,\ z)-(-2\,,0\,,-4)=(x+2\ ,\ y\ ,\ z+4)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{v_\pi}\perp\overrightarrow{CG}\Rightarrow\overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{CG}=0\Rightarrow$$

$$(x+2\ ,\ y\ ,\ z+4)\cdot(2\,,-3\,,3)=0\Rightarrow 2\,(x+2)-3\,y+3\,(z+4)=0\Rightarrow\pi\equiv 2x-3y+3z+16=0$$

$a)$ *Continuación*

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -2 - 3\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow Punto\ de\ intersección\ P \Rightarrow 2\left(2+2\lambda\right) - 3\left(-2-3\lambda\right) + 3\left(1+3\lambda\right) + 16 = 0 \Rightarrow$$

$$4 + 4\lambda + 6 + 9\lambda + 3 + 9\lambda + 16 = 0 \Rightarrow 22\lambda + 29 = 0 \Rightarrow 22\lambda = -29 \Rightarrow \lambda = -\frac{29}{22} \Rightarrow$$

$$P \begin{cases} x = 2 + 2\cdot\left(-\frac{29}{22}\right) = 2 - \frac{58}{22} = 2 - \frac{29}{11} = -\frac{7}{11} \\ y = -2 - 3\left(-\frac{29}{22}\right) = 2 + \frac{87}{22} = \frac{131}{22} \qquad \Rightarrow \\ z = 1 + 3\left(-\frac{29}{22}\right) = 1 - \frac{87}{22} = -\frac{65}{22} \end{cases}$$

$$d\left(\overline{AB}\ ,\ \overline{CD}\right) = d\left(C\ ,\ P\right) = \sqrt{\left[-2 - \left(-\frac{7}{11}\right)\right]^2 + \left(0 - \frac{131}{22}\right)^2 + \left[-4 - \left(-\frac{65}{22}\right)\right]^2} =$$

$$d\left(\overline{AB}\ ,\ \overline{CD}\right) = \sqrt{\left(-2 + \frac{7}{11}\right)^2 + \frac{131^2}{22^2} + \left(-4 + \frac{65}{22}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{15}{11}\right)^2 + \frac{131^2}{22^2} + \left(-\frac{23}{22}\right)^2}$$

$$d\left(\overline{AB}\ ,\ \overline{CD}\right) = \sqrt{\frac{30^2 + 131^2 + 23^2}{22^2}} = \frac{\sqrt{900 + 17161 + 529}}{22} = \frac{\sqrt{18590}}{22}\ u$$

b) El área del triángulo **ABC** es igual a la mitad del módulo del vector que resulta al hallar el producto vectorial de los vectores **AB** y **AC** (al tratarse de valores numéricos no pueden simplificarse ambos vectores)

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \left(-2\ ,\ 3\ ,\ -3\right) \\ \overrightarrow{AC} = \left(-2\ ,\ 0\ ,\ -4\right) - \left(2\ ,\ -2\ ,\ 1\right) = \left(-4\ ,\ 2\ ,\ -5\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & -3 \\ -4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -15\vec{i} + 12\vec{j} - 4\vec{k} + 12\vec{k} + 6\vec{i} - 10\vec{j} = -9\vec{i} + 2\vec{j} + 8\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \left(-9\ ,\ 2\ ,\ 8\right)$$

$$Área = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{\left(-9\right)^2 + 2^2 + 8^2} = \sqrt{81 + 4 + 68} = \sqrt{153} \Rightarrow Área = \frac{\sqrt{153}}{2}\ u^2$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima 2 puntos

Dados el punto **P(1 , 2 , - 1)** y el plano $\pi \equiv x + 2y - 2z + 2 = 0$,sea **S** la esfera que es tangente al plano π en un punto **P'** de modo que el segmento **PP'** es uno de sus diámetros. Se pide:

a) **(1 punto)** Hallar el punto de tangencia **P'**
b) **(1 punto)** Hallar la ecuación de **S**

a) Al ser el diámetro **PP'** el que coincide con la tangencia al plano dado, que es una recta **r** perpendicular a π quedando determinada por el punto **P** y el vector director del plano, siendo la intersección de este con la recta el punto **P'** pedido.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_{PP'}} = \overrightarrow{v_\pi} = (1\,,\,2\,,\,-2) \\ P(1\,,\,2\,,\,-1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$Punto\ P'\ \text{intersección del plano}\ \pi\ y\ la\ recta\ r$$

$$(1+\lambda) + 2\,(2+2\lambda) - 2\,(-1-2\lambda) + 2 = 0 \Rightarrow 1 + \lambda + 4 + 4\lambda + 2 + 4\lambda + 2 = 0 \Rightarrow 9\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow$$

$$P' \begin{cases} x = 1 + (-1) \\ y = 2 + 2\cdot(-1) \Rightarrow P'(0\,,\,0\,,\,1) \\ z = -1 - 2\cdot(-1) \end{cases}$$

b) El centro **C** de la esfera es el punto medio de **PP'** y su radio la mitad de la distancia entre **P** y **P'**

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{1+0}{2} = \dfrac{1}{2} \\ y_C = \dfrac{2+0}{2} = 1 \Rightarrow C\left(\dfrac{1}{2}\,,1\,,\,0\right) \\ x_C = \dfrac{-1+1}{2} = 0 \end{cases}$$

$$d\left(\overline{PP'}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (2-1)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \Rightarrow R_C = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$S \equiv \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - 2y + 1 + z^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y + \frac{5}{4} - \frac{9}{16} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y + \frac{11}{16} = 0 \Rightarrow$$

$$S \equiv 16x^2 + 16y^2 + 16z^2 - 16x - 22y + 11 = 0$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- Calificación máxima 3 puntos

Sea r_A la recta con vector dirección **(1 , λ , 2)** que pasa por el punto **A(1 , 2 , 1)**, r_B la recta con vector dirección **(1 , 1 , 1)** que pasa por **B(1 , - 2 , 3), y** r_C la recta con vector dirección **(1 , 1 , - 2)** que pasa por **C(4 , 1 , - 3)**. Se pide:

a) **(1 punto)** Hallar λ para que las rectas r_A y r_B se corten

b) **(1’5 puntos)** Hallar λ para que la recta r_A sea paralela al plano definido por r_B y r_C

c) **(0’5 puntos)** Hallar el ángulo que forman r_B y r_C

a) El sistema de ecuaciones formado por los datos de las dos rectas en paramétricas tiene que ser Compatible Determinado lo que hace que, como las incógnitas son dos, el determinante de la matriz de los coeficientes ampliadas sea nulo para que el rango de la matriz ampliada sea 2. Analizado si existe un menor de rango 2 de esa matriz tendremos el valor buscado

$$\begin{cases} r_A \equiv \begin{cases} x = 1+\mu \\ y = 2+\lambda\mu \\ z = 1+2\mu \end{cases} \\ r_B \equiv \begin{cases} x = 1+\eta \\ y = -2+\eta \\ z = 3+\eta \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+\mu = 1+\eta \\ 2+\lambda\mu = -2+\eta \\ 1+2\mu = 3+\eta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu-\eta = 0 \\ \lambda\mu-\eta = -4 \\ 2\mu-\eta = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$|A/B| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \lambda & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 4 \\ \lambda & -1 & -4 \\ 2-\lambda & 0 & 6 \end{vmatrix} = (-1)\cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2-\lambda & 6 \end{vmatrix} = -(6-6\lambda-8+4\lambda) = 2\lambda+2 = 0 \Rightarrow$$

$$2\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1 = -1 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = rang(A/B) = 2 = Número\ incognitas$$

$$por\ lo\ \tan to\ \lambda = -1$$

b) El vector director de la recta r_A es perpendicular al vector director del plano π formado **por** r_B y r_C **,** que hallaremos como el producto vectorial de los vectores directores de estas rectas**,** y por lo tanto el producto escalar de esos directores es nulo

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{r_B}} = (1,1,1) \\ \overrightarrow{v_{r_C}} = (1,1,-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_{r_B}} \wedge \overrightarrow{v_{r_C}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} - \vec{k} - \vec{i} + 2\vec{j} = -3\vec{i} + 3\vec{j} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (-3,3,0) \equiv (1,-1,0) \\ \overrightarrow{v_{r_A}} = (1,\lambda,2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{v_{r_A}} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{v_{r_A}} = 0 \Rightarrow (1,-1,0)\cdot(1,\lambda,2) = 0 \Rightarrow 1-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

c) El coseno del ángulo α que forman ambas rectas es igual al cociente del producto escalar de sus vectores directores, expresado en valor absoluto, entre el producto de los módulos de ambos directores

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{r_B}} = (1,1,1) \\ \overrightarrow{v_{r_C}} = (1,1,-2) \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{|(1,1,1)\cdot(1,1,-2)|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{|1+1-2|}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow \alpha = arc\cos 0 = 90^\circ = \frac{\pi}{2}\ rad$$

Ejercicio 2.- Calificación máxima 3 puntos

Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x+\lambda y+\lambda z=1-\lambda \\ x+y+(\lambda-1)\,z=-2\lambda \\ (\lambda-1)\,x+y+z=\lambda-1 \end{cases}$, se pide:

a) **(2 puntos)** Discutirlo según los valores del parámetro λ

b) **(0,5 puntos)** Resolverlo en el caso $\lambda=1$

c) **(0,5 puntos)** Resolverlo en el caso $\lambda=-1$

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda-1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & \lambda-\lambda(\lambda-1) \\ 1 & 1 & \lambda-1 \\ \lambda-2 & 0 & 1-(\lambda-1) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2\lambda-\lambda^2 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \\ \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 2-\lambda & \lambda(2-\lambda) \\ \lambda-2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$|A|=(\lambda-2)\cdot(\lambda-2)\begin{vmatrix} -1 & -\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2\cdot(1+\lambda)\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow(\lambda-2)^2\cdot(1+\lambda)=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda-2=0\Rightarrow\lambda=2\\ \lambda+1=0\Rightarrow\lambda=-1\end{cases}$$

$$\forall\lambda\in\Re-\{-1\,,\,2\}\Rightarrow|A|\neq0\Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ incógnitas\Rightarrow Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ \lambda=-1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<Número\ de\ incógnitas\Rightarrow Compatible\ In\det er\min ado$$

$Si\ \lambda=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow ang\ (A)=1\neq rang\ (A/B)=3\Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$b)$

$Si\ \lambda=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & ´-1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & ´-1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)\Rightarrow 2z=4\Rightarrow z=2\Rightarrow -y+2=4\Rightarrow -y=2\Rightarrow y=-2$$

$$x-2=-2\Rightarrow x=0\Rightarrow Solución\Rightarrow(x\,,\,y\,,\,z)=(0\,,-2\,,\,2)$$

$c)Si\ \lambda=-1\Rightarrow Compatible\ In\det er\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow -3y+3z=2\Rightarrow -3y=-3z+2\Rightarrow y=z-\frac{2}{3}\Rightarrow x+z-\frac{2}{3}-2z=2\Rightarrow x=z-\frac{8}{3}$$

$$Solución\Rightarrow(x\,,\,y\,,\,z)=\left(\alpha-\frac{8}{3}\,,\,\alpha-\frac{2}{3}\,,\,\alpha\right)$$

Ejercicio 3.- Calificación máxima 2 puntos

Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, se pide:

a) **(1 punto)** Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de **f** en **x = 0**

b) **(1 punto)** Calcular $\int_0^1 x\ f(x)\,dx$.

$a)$

$$f'(x)=\frac{x^2+1-2x\,x}{(x^2+1)}=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} f(0)=\dfrac{0}{0^2+1}=\dfrac{0}{1}=0 \\ m=f'(x)=\dfrac{1-0^2}{(0^2+1)}=1 \end{cases}\Rightarrow y-0=1\cdot(x-0)\Rightarrow y=x\Rightarrow t\equiv x-y=0$$

$b)$

$$I=\int_0^1 x\cdot\frac{x}{x^2+1}\,dx=\int_0^1\frac{x^2}{x^2+1}\,dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\int_0^1 dx-\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}=[x]_0^1-[arc\ tg\ x]_0^1$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2+1 \\ \cline{2-2} \underline{-x^2-1} & 1 \\ -1 & \end{array}$$

$$I=(1-0)-(arc\ tg\ 1-arc\ tg\ 0)=1-\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=1-\frac{\pi}{4}=\frac{4-\pi}{4}$$

Ejercicio 4.- Calificación máxima 2 puntos

Dada la función $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$, se pide:

a) **(1 punto)** Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y estudiar la existencia de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

b) **(1 punto)** Esbozar la gráfica **y = f(x)** determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x) y sus asíntotas.

$a)$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{\infty}}=e^0=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{(-x)}}=e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{e^{\frac{1}{\infty}}}=\frac{1}{e^0}=\frac{1}{1}=1$$

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{0}}\Rightarrow Sin\ solución\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{0^+}}=e^{\infty}=\infty\Rightarrow Asíntota\ vertical\Rightarrow x=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{0^-}}=e^{-\frac{1}{0}}=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{0}}}=\dfrac{1}{e^{\infty}}=\dfrac{1}{\infty}=0\end{cases}$$

$b)$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow (-1)\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -1 < 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ e^{\frac{1}{x}} > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \Rightarrow Decreciente \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \end{cases}$$

$Asíntota\ vertical \Rightarrow x = 0^+$

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1 \Rightarrow Existe\ asíntota\ horizontal,\ y = 1,\ cuando\ x \to \infty$$

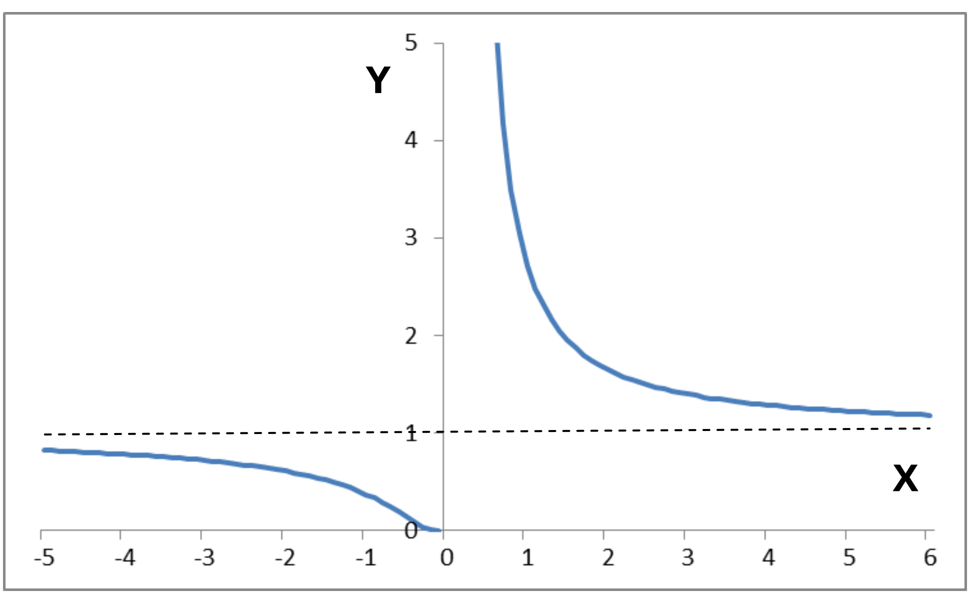
$$\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{(-x)}} = e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{\infty}}} = \frac{1}{e^0} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow Existe\ asíntota\ horizontal,\ y = 1,\ cuando\ x \to -\infty$$

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \frac{e^{\frac{1}{\infty}}}{\infty} = \frac{e^0}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow No\ existe\ asíntota\ oblicua\ cuando\ x \to \infty$$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{(-x)}}}{(-x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{(-x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{-x\, e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{-\infty \cdot e^{\frac{1}{\infty}}} = \frac{1}{-\infty \cdot e^0} = \frac{1}{-\infty \cdot 1} = 0 \Rightarrow$$

No existe asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$



$b)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (2\,,-1\,,1) \\ \overrightarrow{v_r} = (1\,,2\,,3) \end{cases} \Rightarrow sen\ \beta = \frac{\left|\overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_\pi}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_r}\right|} = \frac{\left|(2\,,-1\,,1)\cdot(1\,,2\,,3)\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{\left|2-2+3\right|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{84}} = \frac{3}{2\sqrt{21}}$$

$$sen\ \beta = \frac{3\sqrt{21}}{42} = \frac{\sqrt{21}}{14} \Rightarrow \beta = arc\ sen\left(\frac{\sqrt{21}}{14}\right) = 19^\circ 6' 23''$$