

# OPCIÓN A

**Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.**

Dada las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

se pide:

- a) (1,5 puntos) Calcula  $\alpha, \beta, \gamma$  para que  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  sea solución del sistema  $AX = B$ .
- b) (1 punto) Si  $\beta = \gamma = 1$  ¿Qué condición o condiciones debe cumplir  $\alpha$  para que el sistema lineal homogéneo  $AX = O$  sea compatible determinado?
- c) (0,5 puntos) Si  $\alpha = -1, \beta = 1$  y  $\gamma = 0$ , resuelve el sistema  $AX = B$ .

a)

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = 1 \\ \gamma x + \alpha z = 0 \\ x + \beta y + \gamma z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 2 + \gamma \cdot 3 = 1 \\ \gamma \cdot 1 + \alpha \cdot 3 = 0 \\ 1 + \beta \cdot 2 + \gamma \cdot 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 1 \\ 3\alpha + \gamma = 0 \\ 2\beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 2 - 18 = -2 \neq 0$$

$$\text{Compatible Determinado} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \gamma = -3 \Rightarrow$$

$$2\beta + 3 \cdot (-3) = 0 \Rightarrow 2\beta = 9 \Rightarrow \beta = \frac{9}{2} \Rightarrow \alpha + 2 \cdot \frac{9}{2} + 3 \cdot (-3) = 1 \Rightarrow \alpha + 9 - 9 = 1 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = \left( 1, \frac{9}{2}, 9 \right)$$

**b) Para ser compatible determinado el determinante de los coeficientes no puede ser nulo, si es nulo el sistema es compatible indeterminado**

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 0 \\ x + \alpha z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha + 1 - \alpha^2 - 1 = \alpha - \alpha^2 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow \alpha(1 - \alpha) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} - \{1, 0\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

c)

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ -z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado} \Rightarrow$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow -z = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow -x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (0, 1, 0)$$

**Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.**

Dados el punto  $P(1, 0, 1)$ , el plano  $\pi \equiv x + 5y - 6z = 1$ , y la recta  $r \equiv \begin{cases} x = 0, \\ z = 0, \end{cases}$  se pide:

- (1 punto) Calcular el punto  $P'$  simétrico a  $P$  respecto de  $\pi$ .
- (1 punto) Hallar la distancia de  $P$  a  $r$ .
- (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas  $O(0, 0, 0)$  y las intersecciones de  $\pi$  con los ejes coordenados  $OX$ ,  $OY$  y  $OZ$ .

a) Calcularemos una recta  $r$  que contenga  $P$  y que sea perpendicular al plano  $\pi$ , y, por ello los vectores directores de plano y recta son coincidentes. Después hallaremos el punto de corte del plano con la recta  $r$  que nos da el punto  $Q$ , punto medio entre  $P$  y  $P'$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = \vec{v}_\pi = (1, 5, -6) \\ P(1, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 5\lambda \\ z = 1 - 6\lambda \end{cases} \Rightarrow \text{Punto de corte } Q \text{ con el plano } \pi \Rightarrow$$

$$(1 + \lambda) + 5 \cdot 5\lambda - 6 \cdot (1 - 6\lambda) = 1 \Rightarrow 1 + \lambda + 25\lambda - 6 + 36\lambda - 1 = 0 \Rightarrow 62\lambda - 6 = 0 \Rightarrow 62\lambda = 6 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{6}{62} = \frac{3}{31} \Rightarrow Q \begin{cases} x = 1 + \frac{3}{31} \\ y = 5 \cdot \frac{3}{31} \\ z = 1 - 6 \cdot \frac{3}{31} \end{cases} \Rightarrow Q \left( \frac{34}{31}, \frac{15}{31}, \frac{13}{31} \right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{34}{31} = \frac{1 + x_{P'}}{2} \Rightarrow 31 + 31x_{P'} = 68 \Rightarrow 31x_{P'} = 27 \\ \frac{15}{31} = \frac{0 + y_{P'}}{2} \Rightarrow 31y_{P'} = 30 \\ \frac{13}{31} = \frac{1 + z_{P'}}{2} \Rightarrow 31 + 31z_{P'} = 26 \Rightarrow 31z_{P'} = -5 \end{cases}$$

$$P' \left( \frac{27}{31}, \frac{30}{31}, -\frac{5}{31} \right)$$

b) Hallaremos un plano  $\beta$  que contenga a  $P$  y sea perpendicular a la recta  $r$ , la intersección de esta con el plano es el punto  $H$  y la distancia pedida el módulo del vector  $\overrightarrow{PH}$ . El vector de la recta y el vector  $\overrightarrow{PG}$ , donde  $G$  es el punto genérico del plano son perpendiculares y su producto escalar nulo y la ecuación que queremos hallar del plano.

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (0, 1, 0) \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (1, 0, 1) = (x-1, y, z-1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \overrightarrow{PG} = 0 \Rightarrow (0, 1, 0) \cdot (x-1, y, z-1) = 0$$

$$\beta \equiv y = 0 \Rightarrow$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow H \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PH} = (0, 0, 0) - (1, 0, 1) = (-1, 0, -1) \equiv (1, 0, 1)$$

$$d(P, r) = |\overrightarrow{PH}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

**Continuación del Ejercicio 2 de la opción A**

c)

$$\text{Intersección con } OX \Rightarrow OX \equiv \begin{cases} x = \gamma \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma + 5 \cdot 0 - 6 \cdot 0 = 1 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1, 0, 0)$$

$$\text{Intersección con } OY \Rightarrow OY \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \varpi \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 + 5\varpi - 6 \cdot 0 = 1 \Rightarrow 5\varpi = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{5} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow B\left(0, \frac{1}{5}, 0\right)$$

$$\text{Intersección con } OZ \Rightarrow OZ \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \varrho \end{cases} \Rightarrow 0 + 5 \cdot 0 - 6 \cdot \varrho = 1 \Rightarrow -6\varrho = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow C\left(0, 0, -\frac{1}{6}\right)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (1, 0, 0) - (0, 0, 0) = (1, 0, 0) \\ \overrightarrow{OB} = \left(0, \frac{1}{5}, 0\right) - (0, 0, 0) = \left(0, \frac{1}{5}, 0\right) \\ \overrightarrow{OC} = \left(0, 0, -\frac{1}{6}\right) - (0, 0, 0) = \left(0, 0, -\frac{1}{6}\right) \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \right| \cdot \left| \overrightarrow{OC} \right| \Rightarrow \left| \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \right| \cdot \left| \overrightarrow{OC} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{vmatrix} = -\frac{1}{30} \Rightarrow \left| \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \right| \cdot \left| \overrightarrow{OC} \right| = \frac{1}{30} \Rightarrow$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{180} u^3$$

**Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.**

a) (1 punto) Sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una función dos veces derivable. Sabiendo que el punto de abscisa  $x = -2$  es un punto de inflexión de la gráfica de  $f(x)$  y que la recta de ecuación  $y = 16x + 16$  es tangente a la gráfica de  $f(x)$  en dicho punto, determinar:

$$f(-2), \quad f'(-2) \quad \text{y} \quad f''(-2).$$

b) (1 punto) Determinar el área de la región acotada limitada por la gráfica de la función  $g(x) = x^4 + 4x^3$  y el eje  $OX$ .

a)

$$f(-2) = 16 \cdot (-2) + 16 = -32 + 16 = -16 \Rightarrow \text{Punto que se cumple con la recta tan gente}$$

$$f'(-2) = 16 \Rightarrow \text{Pendiente de la recta tan gente}$$

$$f''(-2) = 0 \Rightarrow \text{Punto de inflexión}$$

**Continuación del Ejercicio 3 de la Opción A**

b)

$$\text{Puntos de corte con OX} \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow x^4 + 4x^3 = 0 \Rightarrow (x+4)x^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

$$-4 < -2 < 0 \Rightarrow (-2)^4 + 4 \cdot (-2)^3 = 16 + 4 \cdot (-8) = 16 - 32 = -16 < 0 \Rightarrow$$

$$A = \left| \int_{-4}^0 (x^4 + 4x^3) dx \right| = \int_0^{-4} (x^4 + 4x^3) dx = \frac{1}{5} \cdot [x^5]_0^{-4} + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot [x^4]_0^{-4} = \frac{1}{5} \cdot [(-4)^5 - 0^5] + [(-4)^4 - 0^4]$$

$$A = \frac{1}{5} \cdot (-1024) + 256 = \frac{1280 - 1024}{5} = \frac{256}{5} u^2$$

**Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.**

Calcular justificadamente:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2x - e^x + \text{sen}(3x)}{x^2} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x^2 + 2)(x - 6)}{(x^2 - 1)(2x - 1)}$$

a)

$$\begin{aligned} y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2x - e^x + \text{sen}(3x)}{x^2} = \frac{1 - 2 \cdot 0 - e^0 + \text{sen}(3 \cdot 0)}{0^2} = \frac{1 - 0 - 1 + 0}{0} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 2 - e^x + 3 \cdot \cos(3x)}{2x} = \frac{-2 - e^0 + 3 \cdot \cos(0)}{2 \cdot 0} = \frac{-2 - 1 + 3 \cdot \cos(0)}{0} = \frac{-2 - 1 + 3 \cdot 1}{0} = \frac{0}{0} = \\ &= \xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-0 - e^x + 3 \cdot 3 \cdot [-\text{sen}(3x)]}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x - 9 \cdot \text{sen}(3x)}{2} = \frac{-e^0 - 9 \cdot \text{sen}(3 \cdot 0)}{2} = \\ &= \frac{-1 - 9 \cdot \text{sen}(0)}{2} = \frac{-1 - 9 \cdot 0}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x^2 + 2)(x - 6)}{(x^2 - 1)(2x - 1)} &= \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x(x - 6) + (5x^2 + 2)}{2x(2x - 1) + 2(x^2 - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2 - 60x + 5x^2 + 2}{4x^2 - 2x + 2x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x^2 - 60x + 2}{6x^2 - 2x - 2} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15 \frac{x^2}{x^2} - 60 \frac{x}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{6 \frac{x^2}{x^2} - 2 \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15 - \frac{60}{x} + \frac{2}{x^2}}{6 - \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{15 - \frac{60}{\infty} + \frac{2}{\infty}}{6 - \frac{2}{\infty} - \frac{2}{\infty}} = \frac{15 - 0 + 0}{6 - 0 - 0} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

## OPCIÓN B

### Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} a + \ln(1 - x), & \text{si } x < 0, \\ x^2 e^{-x}, & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

(donde  $\ln$  denota logaritmo neperiano) se pide:

- (1 punto) Calcular  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- (1 punto) Calcular el valor de  $a$ , para que  $f(x)$  sea continua en todo  $\mathbf{R}$ .
- (1 punto) Estudiar la derivabilidad de  $f$  y calcular  $f'$ , donde sea posible.

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{Utilizando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{Utilizando L'Hopital}}{\rightarrow} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a + \ln(1 - x) = \ln[1 - (-\infty)] = \ln(1 + \infty) = \infty$$

b)

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = a + \ln(1 - 0) = a + \ln 1 = a + 0 = a \\ f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^2 e^{-0} = 0 \cdot 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Rightarrow a = 0$$

c)

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} \cdot (-1) & \text{si } x < 0 \\ 2x \cdot e^{-x} - x^2 e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \frac{-1}{1-0} = \frac{-1}{1} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0 \cdot e^{-0} (2-0) = 0 \cdot 1 \cdot 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0 \Rightarrow \text{No es derivable en } x = 0 \Rightarrow$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ x \cdot e^{-x} (2-x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

**Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.**

Dados el plano  $\pi \equiv 2x - y = 2$ , y la recta  $r \equiv \begin{cases} x = 1, \\ y - 2z = 2, \end{cases}$  se pide:

- (1 punto) Estudiar la posición relativa de  $r$  y  $\pi$ .
- (1 punto) Determinar el plano que contiene a  $r$  y es perpendicular a  $\pi$ .
- (1 punto) Determinar la recta que pasa por  $A(-2, 1, 0)$ , corta a  $r$ , y es paralela a  $\pi$ .

a) Un plano y una recta pueden ser paralelos, pertenecer la recta al plano o cortarse en un punto. Son paralelos o la recta está contenida en el plano cuando los vectores directores, de ambos, son perpendiculares y su producto escalar es nulo, de no ser así se cortan en un punto.

$$y = 2 + 2z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (0, 2, 1) \\ \vec{v}_\pi = (2, 0, -1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = (0, 2, 1) \cdot (2, 0, -1) = 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{Se cortan en un punto}$$

b) El plano  $\alpha$  queda determinado por el vector director de la recta, el vector director del plano  $\pi$  y el vector  $\overrightarrow{RG}$ , siendo  $\mathbf{R}$  un punto cualquiera de la recta (tomamos el indicado en la ecuación paramétrica) y  $\mathbf{G}$  el punto genérico del plano. Los tres vectores son coplanarios y el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación del plano pedido.

$$\text{Si } R(1, 2, 0) \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (0, 2, 1) \\ \vec{v}_\pi = (2, 0, -1) \\ \overrightarrow{RG} = (x, y, z) - (1, 2, 0) = (x-1, y-2, z) \end{cases} \Rightarrow \alpha \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-2(x-1) + 2(y-2) - 4z = 0 \Rightarrow (x-1) - (y-2) + 2z = 0 \Rightarrow \alpha \equiv x - y + 2z + 1 = 0$$

c) El vector director de la recta es  $\overrightarrow{AH}$ , en donde  $\mathbf{H}$  es el punto genérico de la recta  $r$ , es perpendicular al vector director del plano y, por ello, su producto escalar es nulo, con el valor que nos da tendremos el punto  $Q$  que nos determina el valor, de nuevo, del vector director de la recta  $AQ$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} = (1, 2 + 2\lambda, \lambda) - (-2, 1, 0) = (3, 1 + 2\lambda, \lambda) \\ \vec{v}_\pi = (2, 0, -1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AH} \perp \vec{v}_\pi \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{v}_\pi = 0 \Rightarrow$$

$$(2, 0, -1) \cdot (3, 1 + 2\lambda, \lambda) = 0 \Rightarrow 6 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 6 \Rightarrow \overrightarrow{AQ} = (3, 1 + 2 \cdot 6, 6) = (3, 13, 6) \Rightarrow$$

$$s \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{13} = \frac{z}{6}$$

**Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.**

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix},$$

se pide:

- (1 punto) Hallar el valor o valores de  $a$  para que la matriz  $A$  tenga inversa.
- (1 punto) Calcular la matriz inversa  $A^{-1}$  de  $A$ , en el caso  $a = 2$ .

a) Si una matriz tiene inversa su determinante no es nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & a \\ 0 & 5 & -2a \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 5 - 2a^2 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow 5 - 2a^2 = 0 \Rightarrow$$

$$2a^2 = 5 \Rightarrow a^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow a = \pm \sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{10}}{2} \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2} \right\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

b)

$$\text{Con } a = 2 \Rightarrow |A| = 5 - 2 \cdot 2^2 = 5 - 8 = -3 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj } A^t \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{adj } A^t = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -6 \\ -3 & 1 & -4 \\ -6 & 2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{(-3)} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 & -6 \\ -3 & 1 & -4 \\ -6 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 2 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.**

Por la compra de cinco cuadernos, dos rotuladores y tres bolígrafos se han pagado veintidós euros. Si se compran dos cuadernos, un rotulador y seis bolígrafos, el coste es de catorce euros. Se pide:

- (1 punto) Expresar, en función del precio de un bolígrafo, lo que costaría un cuaderno y lo que costaría un rotulador.
- (1 punto) Calcular lo que deberíamos pagar si adquirimos ocho cuadernos y tres rotuladores.

a)

$$\begin{cases} 5C + 2R + 3B = 22 \\ 2C + R + 6B = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5C + 2R = 22 - 3B \\ 2C + R = 14 - 6B \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Sist. Compatible Determ.}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 22 - 3B \\ 2 & 1 & 14 - 6B \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -6 + 9B \\ 2 & 1 & 14 - 6B \end{array} \right) \Rightarrow C = -6 + 9B \Rightarrow 2 \cdot (9B - 6) + R = 14 - 6B \Rightarrow 18B - 12 + R = 14 - 6B$$

$$R = 26 - 24B \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (C, R) = (9B - 6, 26 - 24B)$$

b)

$$8C + 3R = 8 \cdot (9B - 6) + 3 \cdot (26 - 24B) = 72B - 48 + 78 - 72B = 30 \text{ €}$$