OPCIÓN A

Ejercicio 1 : Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función $f\left(x\right)=\frac{x}{x^2-4}+\frac{\ln\left(x+1\right)}{x+1}$ donde ln denota el logaritmo neperiano, se pide:

a) (1'5 puntos) Determinar el dominio de **f** y sus asíntotas.
b) (0'75 puntos) Calcular la recta tangente a la curva ***y = f(x)*** en **x = 0**.
c) (0'75 puntos) Calcular $\int f\left(x\right)dx$

$a)$

$$\begin{cases} x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow f\left(2\right)=\frac{2}{2^2-4}+\frac{\ln 3}{3}=\frac{2}{0}+\frac{\ln 3}{3} \Rightarrow Sin\ solución \\ x=-2 \Rightarrow f\left(-2\right)=\frac{-2}{0}+\frac{\ln\left(-1\right)}{-1} \Rightarrow Sin\ solución \end{cases} \\ x+1>0 \Rightarrow x>-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$Dom\left(f\right)=\forall x\in\Re\,/\,x>-1-\left\{2\right\}$$

$$Asíntota\ vertical \Rightarrow x=2$$

$$Asíntota\ horizontal$$

$$\lim_{x\to\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x^2-4}+\frac{\ln\left(x+1\right)}{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-4}+\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x+1\right)}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}+\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}+\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}=0+0=0 \Rightarrow$$

$$Existe\ asíntota\ horizontal,\ y=0\ cuando\ x\to\infty$$

$$Asíntota\ oblicua$$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{x}{x^2-4}}{x}+\frac{\frac{\ln\left(x+1\right)}{x+1}}{x}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(x^2-4\right)}+\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x+1\right)}{x\left(x+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-4}+\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x+1\right)}{x\left(x+1\right)}=$$

$$=\frac{1}{\infty}+\frac{\infty}{\infty}=0+\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x+1\right)}{x\left(x+1\right)}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{x+1+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(2x+1\right)\left(x+1\right)}=\frac{1}{\infty}=0 \Rightarrow$$

$$No\ existe\ asíntota\ oblicua\ cuando\ x\to\infty$$

$b)$

$$f'\left(x\right)=\frac{x^2-4-2x\cdot x}{\left(x^2-4\right)^2}+\frac{\frac{1}{x+1}\cdot\left(x+1\right)-\ln\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)^2}=\frac{-x^2-4}{\left(x^2-4\right)^2}+\frac{1-\ln\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f\left(0\right)=\frac{0}{0^2-4}+\frac{\ln\left(0+1\right)}{0+1}=\frac{0}{-4}+\frac{\ln 1}{1}=0+\frac{0}{1}=0 \\ f'\left(0\right)=\frac{-0^2-4}{\left(0^2-4\right)^2}+\frac{1-\ln\left(0+1\right)}{\left(0+1\right)^2}=\frac{-4}{16}+\frac{1-\ln 1}{1^2}=-\frac{1}{4}+\frac{1-0}{1}=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow y-0=\frac{3}{4}\left(x-0\right) \Rightarrow 4y=3x \Rightarrow$$

$$3x-4y=0$$

Continuación del Ejercicio 1 de la opción A

$c)$

$$\int\left[\frac{x}{x^2-4}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]dx=\int\frac{x}{x^2-4}\,dx+\int\frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx=\int\frac{1}{t}\frac{dt}{2}+\int u\,du=\frac{1}{2}\cdot\ln t+\frac{1}{2}\cdot u^2$$

$$x^2-4=t\Rightarrow 2x\,dx=dt\Rightarrow x\,dx=\frac{dt}{2}\qquad \ln(x+1)=u\Rightarrow\frac{dx}{x+1}=du$$

$$\int\left[\frac{x}{x^2-4}+\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]dx=\frac{1}{2}\cdot\left[\ln\left(x^2-4\right)+\ln^2(x+1)\right]+K$$

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 3 puntos.

a) (2 puntos) Discutir, según los valores de **m**, el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases}4x+3y+(m-1)z=0\\ x-2y+mz=1\\ 5x+my+z=1\end{cases}$$

b) (1 punto) Resolver el sistema anterior para el caso **m = 1**.

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix}4&3&m-1\\1&-2&m\\5&m&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&11&m-1-4m\\1&-2&m\\0&m+10&1-5m\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}11&-1-3m\\m+10&1-5m\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}11&3m+1\\m+10&5m-1\end{vmatrix}$$

$$|A|=55m-11-(3m+1)(m+10)=55m-11-\left(3m^2+30m+m+10\right)=-3m^2+24m-21=(-3)\cdot\left(m^2-8m+7\right)$$

$$Si\ |A|=0\Rightarrow(-3)\cdot\left(m^2-8m+7\right)=0\Rightarrow m^2-8m+7=0\Rightarrow\Delta=(-8)^2-4\cdot1\cdot7=36\geq0\Rightarrow m=\frac{8\pm\sqrt{36}}{2\cdot1}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}m=\dfrac{8-6}{2}=1\\ m=\dfrac{8+6}{2}=7\end{cases}\Rightarrow\forall m\in\Re-\{1\,,7\}\Rightarrow|A|\neq0\Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ incógnitas\Rightarrow$$

Sistema Compatible Determinado

$Si\ m=7$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4&3&6&0\\1&-2&7&1\\5&7&1&1\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}0&11&-22&-4\\1&-2&7&1\\0&17&-34&-4\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}0&187&-374&-68\\1&-2&7&1\\0&187&-374&-44\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}0&187&-374&-68\\1&-2&7&1\\0&0&0&24\end{array}\right)\Rightarrow$$

$rang\ (A)=2\neq rang\ (A)=3\Rightarrow Sistema\ Incompatible$

$Si\ m=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4&3&0&0\\1&-2&1&1\\5&1&1&1\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}4&3&0&0\\1&-2&1&1\\4&3&0&0\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}4&3&0&0\\1&-2&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<Número\ de\ incógnitas\Rightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

Continuación del Ejercicio 2 de la opción A

$b)$

$Si\ m = 1 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 4x+3y=0 \Rightarrow 4x=-3y \Rightarrow x=\frac{-3}{4}y \Rightarrow \frac{-3}{4}y+2y+z=1 \Rightarrow z=1-\frac{5}{4}y$$

$$Solución \Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z)=\left(\frac{-3}{4}\lambda\,,\,\lambda\,,1-\frac{5}{4}\lambda\right) \equiv (-3\lambda\,,\,4\lambda\,,1-5\lambda)$$

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2 puntos.

a) (1 punto) Dados los vectores $\vec{u}=(2\,,3\,,4)$, $\vec{v}=(-1\,,-1\,,-1)$ y $\vec{w}=(-1\,,\,\lambda\,,5)$, encontrar los valores de λ que hacen que el paralelepípedo **P** generado por $\vec{u}\,,\vec{v}\ y\ \vec{w}$ tenga volumen **6**.

b) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta incluida en el plano **z = 0**, con dirección perpendicular a $\vec{u}=(2\,,-1\,,4)$ y que pasa por el punto **(1 , 1 , 0)**.

a) El modulo del producto mixto de los tres vectores $\vec{u}\,,\vec{v}\ y\ \vec{w}$ es el volumen del paralelepípedo cuyo valor son **6 u^3**

$$\left|\vec{u}\cdot\left|\vec{v}\wedge\vec{w}\right|\right|=6 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & 5 \end{vmatrix} = -10+3-4\lambda-4+2\lambda+15 \Rightarrow \left|-2\lambda+4\right|=6 \Rightarrow -2\lambda+4=6 \Rightarrow -2\lambda=-2 \Rightarrow$$

$\lambda = 1$

b) El vector director de la recta **r** es perpendicular al vector $\vec{u}$ y al vector director del plano dado, por lo tanto es el vector resultante de los dos vectores citados

$$\begin{cases} \vec{u}=(2\,,-1\,,4) \\ \vec{v_\pi}=(0\,,0\,,1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v_r}=\vec{v_\pi}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i}-2\vec{j} \Rightarrow \vec{v_r}=(-1\,,-2\,,0)\equiv(1\,,2\,,0) \Rightarrow r\equiv\begin{cases} x=1+\mu \\ y=1+2\mu \\ z=0 \end{cases}$$

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2 puntos.

Dados el plano $\pi \equiv x-2y+2z+1=0$ y la superficie esférica $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$, hallar los planos tangentes a la esfera que son paralelos al plano π

Hallaremos una recta **r** que contenga el centro **C** de la esfera y cuyo vector director sea el del plano dado, calculando los puntos **P** y **Q** de intersección de esta con la esfera, que son puntos de los planos pedidos y paralelos al dado

$$Siendo \begin{cases} C(1,1,2) \\ r^2=9 \Rightarrow r=\pm\sqrt{9} \Rightarrow \begin{cases} r=3 \\ r=-3 \Rightarrow Sin\ solución \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{v_\pi}=(1,-2,2) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$(1+\lambda-1)^2+(1-2\lambda-1)^2+(2+2\lambda-2)^2=9 \Rightarrow \lambda^2+(-2\lambda)^2+(2\lambda)^2-9=0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2+4\lambda^2+4\lambda^2-9=0 \Rightarrow 9\lambda^2-9=0 \Rightarrow 9\lambda^2=9 \Rightarrow \lambda^2=1 \Rightarrow \lambda=\pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=1 \Rightarrow P \begin{cases} x=1+1 \\ y=1-2\cdot 1 \\ z=2+2\cdot 1 \end{cases} \\ \lambda=-1 \Rightarrow Q \begin{cases} x=1+(-1) \\ y=1-2\cdot(-1) \\ z=2+2\cdot(-1) \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$Los\ planos\ paralelos\ son\ de\ la\ forma\ \ x-2y+2z+D=0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} P(2,-1,4) \Rightarrow 2-2\cdot(-1)+2\cdot 4+D=0 \Rightarrow 12+D=0 \Rightarrow D=-12 \Rightarrow \pi_1 \equiv x-2y+2z-12=0 \\ Q(0,3,0) \Rightarrow 0-2\cdot 3+2\cdot 0+D=0 \Rightarrow -6+D=0 \Rightarrow D=6 \Rightarrow \pi_2 \equiv x-2y+2z+6=0 \end{cases}$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1 : Calificación máxima: 3 puntos.

Dados el punto **P(-4 , 6 , 6)**, el origen de coordenadas **O**, y la recta $r \equiv \begin{cases} x = -4+4\lambda \\ y = 8+3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$

se pide:

a) (1 punto) Determinar un punto **Q** de la recta **r**, de modo que su proyección **Q'** sobre $\overline{OP}$ sea el punto medio de este segmento.
b) (1 punto) Determinar la distancia de **P** a **r**.
c) (1 punto) ¿Existe algún punto **R** de la recta **r**, de modo que los puntos **O**, **P** y **R** estén alineados? En caso afirmativo, encontrar el punto (o los puntos) con esa propiedad o, en caso negativo, justificar la no existencia.

a) El vector formado por el punto genérico **R** de la recta **r** y el punto **S** medio entre **O** y **P** y el vector **OP** son perpendiculares y su producto escalar es nulo.

$$S\begin{cases} x_s = \dfrac{0+(-4)}{2} = -2 \\ y_s = \dfrac{0+6}{2} = 3 \\ z_s = \dfrac{0+6}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OP} = (-4,6,6)-(0,0,0) = (-4,6,6) \equiv (-2,3,3) \\ \overrightarrow{SR} = (-4+4\lambda, 8+3\lambda, -2\lambda)-(-2,3,3) = (-2+4\lambda, 5+3\lambda, -3-2\lambda) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{SR} \Rightarrow \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{SR} = 0 \Rightarrow (-2,3,3)\cdot(-2+4\lambda, 5+3\lambda, -3-2\lambda) = 0 \Rightarrow 4-8\lambda+15+9\lambda-9-6\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$10-5\lambda = 0 \Rightarrow 5\lambda = 10 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow Q\begin{cases} x = -4+4\cdot 2 \\ y = 8+3\cdot 2 \\ z = -2\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow Q(4,14,-4)$$

b) Hallaremos un plano π que conteniendo a **P** sea perpendicular a la recta **r,** siendo el vector director del plano el de la recta que es perpendicular al vector **PG**, es **G** el punto genérico del plano, y el producto escalar, de ambos, nulo y la ecuación del plano buscado.
Se hallará, a continuación, el punto **S** de intersección de la recta **r** y el plano π, siendo el módulo del vector **PS** la distancia pedida.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_r} = (4,3,-2) \\ \overrightarrow{PG} = (x,y,z)-(-4,6,6) = (x+4, y-6, z-6) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{PG} = 0 \Rightarrow$$

$$(4,3,-2)\cdot(x+4, y-6, z-6) = 0 \Rightarrow 4x+16+3y-18-2z+12 = 0 \Rightarrow \pi \equiv 4x+3y-2z+10 = 0$$

$$Intersección \Rightarrow 4\cdot(-4+4\cdot\lambda)+3\cdot(8+3\cdot\lambda)-2\cdot(-2\lambda)+10 = 0 \Rightarrow -16+16\lambda+24+9\lambda+4\lambda+10 = 0 \Rightarrow$$

$$18+29\lambda = 0 \Rightarrow 29\lambda = 18 \Rightarrow \lambda = \frac{18}{29} \Rightarrow S\begin{cases} x = -4+4\cdot\dfrac{18}{29} \\ y = 8+3\cdot\dfrac{18}{29} \\ z = -2\cdot\dfrac{18}{29} \end{cases} \Rightarrow Q(4,14,-4)$$

Continuación del Ejercicio 1 de la Opción B

c) Los vectores **OP** y **OR**, siendo **R** el punto genérico de la recta, son proporcionales o iguales

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP}=(-4\,,6\,,6)-(0\,,0\,,0)=(-4\,,6\,,6)\equiv(-2\,,3\,,3) \\ \overrightarrow{OR}=(-4+4\lambda\,,8+3\lambda\,,-2\lambda)-(0\,,0\,,0)=(-4+4\lambda\,,8+3\lambda\,,-2\lambda) \end{cases} \Rightarrow \frac{-2}{-4+4\lambda}=\frac{3}{8+3\lambda}=\frac{3}{-2\lambda}$$

$$\begin{cases} \dfrac{-2}{-4+4\lambda}=\dfrac{3}{-2\lambda}\Rightarrow 4\lambda=-12+12\lambda\Rightarrow -12+8\lambda=0\Rightarrow 8\lambda=12\Rightarrow \lambda=\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{3}{8+3\lambda}=\dfrac{3}{-2\lambda}\Rightarrow -6\lambda=24+9\lambda\Rightarrow 24+15\lambda=0\Rightarrow 15\lambda=-24\Rightarrow \lambda=-\dfrac{24}{15}=-\dfrac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}\neq-\frac{8}{5}\Rightarrow \textit{No existen}$$

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{sen\ x}{x} & si \quad x<0 \\ xe^x+1 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$ se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad de f.
b) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' donde sea posible.

c) (1 punto) Calcular $\int_1^3 f(x)\,dx$

$a)$

$$f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{sen\ x}{x}=\dfrac{sen\ 0}{0}=\dfrac{0}{0}=\xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\cos x}{1}=\cos 0=1 \\ f(0)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} xe^x+1=0\cdot e^0+1=0\cdot1+1=0+1=1 \end{cases}\Rightarrow$$

$$f(0)=\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^-} f(x)=1\Rightarrow \textit{Es continua en } x=0$$

$b)$

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{x\cdot\cos x-sen\ x}{x^2} & si \quad x<0 \\ e^x+xe^x & si \quad x>0 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to0^-} f'(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x\cdot\cos x-sen\ x}{x^2}=\frac{0\cdot\cos 0-sen\ 0}{0^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\cos x-x\cdot sen\ x-\cos x}{2x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x\cdot sen\ x}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-sen\ x}{2}=-\frac{sen\ 0}{2}=0$$

$$\lim_{x\to0^+} f'(x)=\lim_{x\to0^+} e^x(x+1)=e^0(0+1)=1\cdot(0+1)=1\cdot1=1$$

$$\lim_{x\to0^+} f'(x)=0\neq\lim_{x\to0^-} f'(x)=1\Rightarrow \textit{No es derivable en } x=0\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} \dfrac{x\cdot\cos x-sen\ x}{x^2} & si \quad x<0 \\ e^x+xe^x & si \quad x>0 \end{cases}$$

Continuación del Ejercicio 1 de la Opción B

$c)$

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 \left(xe^x + 1\right) dx = \int_1^3 xe^x\ dx + \int_1^3 dx = \left[xe^x\right]_1^3 - \int_1^3 e^x\ dx + \left[x\right]_1^3 = \left(3e^3 - 1\cdot e^1\right) - \left[e^x\right]_1^3 + (3-1)$$

$$\begin{cases} x = u \Rightarrow dx = du \\ e^x\ dx = dv \Rightarrow v = \int e^x\ dx = e^x \end{cases}$$

$$\int_1^3 f(x)\,dx = 3e^3 - e - \left(e^3 - e^1\right) + 2 = 2e^3 + 2 = 2\left(e^3 + 1\right)$$

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2 puntos.

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1 punto) Calcular $\mathbf{A^{15}}$ y $\mathbf{A^{20}}$.

b) (1 punto) Resolver la ecuación matricial **6X = B – 3AX**, donde **X** es una matriz cuadrada de orden **3**.

$a)$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \Rightarrow A^3 = A^2 \cdot A = I_3 \cdot A = A \Rightarrow A^4 = A^2 \cdot A^2 = I_3 \cdot I_3 = I_3$$

$$A^5 = A \Rightarrow A^6 = I_3 \ldots\ldots\ldots A^{15} = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ldots\ldots\ldots A^{15} = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$b)$

$$6X + 3AX = B \Rightarrow X\left(6I_3 + 3A\right) = B \Rightarrow X\left(6I_3 + 3A\right)\left(6I_3 + 3A\right)^{-1} = B\left(6I_3 + 3A\right)^{-1} \Rightarrow XI_3 = B\left(6I_3 + 3A\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$X = B\left(6I_3 + 3A\right)^{-1}$$

$$6I_3 + 3A = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left|6I_3 + 3A\right| = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 324 - 81 = 243 \neq 0 \Rightarrow Existe\ \left(6I_3 + 3A\right)^{-1} \Rightarrow \left(6I_3 + 3A\right)^{-1} = \frac{1}{\left|6I_3 + 3A\right|}\ adj\left[\left(\left|6I_3 + 3A\right|\right)^t\right]$$

$$\left(\left|6I_3 + 3A\right|\right)^t = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\left[\left(\left|6I_3 + 3A\right|\right)^t\right] = \begin{pmatrix} 54 & 0 & -27 \\ 0 & 27 & 0 \\ -27 & 0 & 54 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(6I_3 + 3A\right)^{-1} = \frac{1}{243}\begin{pmatrix} 54 & 0 & -27 \\ 0 & 27 & 0 \\ -27 & 0 & 54 \end{pmatrix}$$

$b)$*Continuación*

$$X=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{243}\begin{pmatrix}54&0&-27\\0&27&0\\-27&0&54\end{pmatrix}=\frac{1}{243}\cdot 3\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}54&0&-27\\0&27&0\\-27&0&54\end{pmatrix}=\frac{1}{81}\cdot I_3\cdot\begin{pmatrix}54&0&-27\\0&27&0\\-27&0&54\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{81}\cdot\begin{pmatrix}54&0&-27\\0&27&0\\-27&0&54\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{3}&0\\-\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2 puntos.

Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&t&2\\3&-1&t\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ se pide:

a) (1’25 puntos) Hallar el rango de **A** en función de **t**.
b) (0’75 puntos) Calcular **t** para que **det(A - tI) = 0**.

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&t&2\\3&-1&t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&t&2\\0&-7&t-9\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}t&2\\-7&t-9\end{vmatrix}=t\cdot(t-9)+14=t^2-9t+14\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow t^2-9t+14=0$$

$$\Delta=(-9)^2-4\cdot1\cdot14=81-56=25\geq 0\Rightarrow t=\frac{9\pm\sqrt{25}}{2\cdot1}\Rightarrow\begin{cases}t=\frac{9-5}{2}=2\\t=\frac{9+5}{2}=7\end{cases}\Rightarrow$$

$$\forall t\in\Re-\{2\,,7\}\Rightarrow|A|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=3$$

$Si\ t=2$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&2\\3&-1&2\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&2\\0&-7&-7\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (A)=2$$

$Si\ t=7$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&2\\3&-1&7\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&2\\0&-7&-2\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&2\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow rang\ (A)=2$$

b)

$$A-tI=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & t & 2\\ 3 & -1 & t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}t & 0 & 0\\ 0 & t & 0\\ 0 & 0 & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-t & 2 & 3\\ 0 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow |A-tI|=\begin{vmatrix}1-t & 2 & 3\\ 0 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-t+6 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 0\end{vmatrix}$$

$$|A-tI|=-(-1)\cdot\begin{vmatrix}7-t & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2\cdot(7-t)\Rightarrow Como\ |A-tI|=0\Rightarrow 2\cdot(7-t)=0\Rightarrow 7-t=0\Rightarrow t=7$$