OPCIÓN A

Ejercicio 1 : Calificación máxima: 3 puntos.

Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1-x)}{1-x} & si \quad x<0 \\ xe^{-x} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$ donde ln denota el logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad de **f** y calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) (0'5 puntos) Calcular la recta tangente a la curva ***y = f(x)*** en **x = 2**.

c) (1'5 puntos) Calcular $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

a)

$1-x=0 \Rightarrow x=1\notin(-\infty\,,0)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\dfrac{\ln(1-0)}{1-0}=\dfrac{\ln 1}{1}=0 \\ f(0)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0\cdot e^{-0}=0\cdot1=0 \end{cases} \Rightarrow \textit{Es continua en } \forall x\in\Re$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1-x)}{1-x}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{1}{1-x}}{-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1+\infty}=\frac{1}{\infty}=0$$

b)

$$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)\,e^{-x}\Rightarrow\begin{cases} y=f(2)=2\cdot e^{-2}=\dfrac{2}{e^2} \\ y'=f'(2)=(1-2)\,e^{-2}=\dfrac{-1}{e^2} \end{cases}\Rightarrow y-\frac{2}{e^2}=\frac{-1}{e^2}\cdot(x-2)$$

c)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{\ln(1-x)}{1-x}dx+\int_{0}^{1}xe^{-x}dx=\int_{2}^{1}\frac{\ln t}{t}(-dt)+\left[x\left(-e^{-x}\right)\right]_0^1-\int_0^1\left(-e^{-x}\right)dx=$$

$$1-x=t\Rightarrow -dx=dt\Rightarrow dx=-dt\Rightarrow\begin{cases} x=0\Rightarrow t=1 \\ x=-1\Rightarrow t=2\end{cases} \qquad \begin{cases} x=u\Rightarrow dx=du \\ e^{-x}dx=dv\Rightarrow v=\int e^{-x}dx=-e^{-x}\end{cases}$$

$$-\int_2^1\frac{\ln t}{t}dt-\left[x\,e^{-x}\right]_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=-\int_{\ln 2}^{0} v\,dv-\left(1\cdot e^{-1}-0\cdot e^{-0}\right)-\left[e^{-x}\right]_0^1=-\frac{1}{2}\cdot\left[v^2\right]_{\ln 2}^{0}-\left(\frac{1}{e}-0\right)-\left(\frac{1}{e}-e^{-0}\right)$$

$$\ln t=v\Rightarrow\frac{dt}{t}=dv\Rightarrow\begin{cases} t=2\Rightarrow v=\ln 2 \\ t=1\Rightarrow v=\ln 1=0\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=-\frac{1}{2}\cdot\left(0^2-\ln^2 2\right)-\frac{2}{e}+1=\frac{1}{2}\ln^2 2-\frac{e-2}{e}=\frac{2}{2}\ln 2-\frac{e-2}{e}=\ln 2-\frac{e-2}{e}$$

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 3 puntos.
a) (1.5 puntos) Despeje **X** en la ecuación matricial **X (CD)$^{-1}$ = A + X (D^{-1}C^{-1} – B**), siendo **A**, **B**, **C**, **D** matrices cuadradas invertibles. Exprese **X** de la forma más simple posible.

b) (1.5 puntos) Para $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ determine la matriz **Y** tal que **Y B = A**.

$a)$

$$X(CD)^{-1} - X\left(D^{-1}C^{-1} - B\right) = A \Rightarrow X\left(C^{-1}D^{-1} - C^{-1}D^{-1} + B\right) = A \Rightarrow XB = A \Rightarrow XBB^{-1} = AB^{-1} \Rightarrow XI = AB^{-1} \Rightarrow$$
$$X = AB^{-1}$$

$b)$

$$YB = A \Rightarrow YBB^{-1} = AB^{-1} \Rightarrow YI = AB^{-1} \Rightarrow Y = AB^{-1}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-2) = 2 \neq 0 \Rightarrow Existe\ B^{-1} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}\cdot adj\ B^t \Rightarrow$$

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ B^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2 puntos.

Dados los planos $\pi_1 \equiv ax + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + ay + z - 2 = 0$, determine, en caso de que existan, el valor o posibles valores del parámetro **a**, para cada uno de los siguientes supuestos:

a) **(0.5 puntos)** Que π_1 y π_2 sean paralelos.

b) **(0.5 puntos)** Que π_1 y π_2 sean perpendiculares.

c) **(1 punto)** Que la recta intersección de π_1 y π_2 sea perpendicular al plano **x = y**.

a) Si dos planos son paralelos sus vectores directores son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (a\,,1\ \ ,-1) \\ \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (1\,,a\ \ ,1) \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{a} = \frac{-1}{1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{1} = \frac{-1}{1} \Rightarrow a = -1 \\ \frac{1}{a} = \frac{-1}{1} \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -1$$

b) Si dos planos son perpendiculares sus vectores directores son perpendiculares y su producto escalar es nulo

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (a\,,1\ \ ,-1) \\ \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (1\,,a\ \ ,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_1}} \perp \overrightarrow{v_{\pi_2}} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{v_{\pi_2}} = 0 \Rightarrow (a\,,1\ \ ,-1)\cdot(1\,,a\ \ ,1) = 0 \Rightarrow a + a - 1 = 0 \Rightarrow 2a - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

c) El vector director de la recta es igual o proporcional al del plano

El vector director de la recta, formado por los planos, es el producto vectorial de sus vectores directores.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (a\,,1\ \ ,-1) \\ \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (1\,,a\ \ ,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_1}} \wedge \overrightarrow{v_{\pi_2}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} + a^2\vec{k} - \vec{k} + a\vec{i} - a\vec{j} = (1+a)\vec{i} - (1+a)\vec{j} + (a^2-1)\vec{k} \Rightarrow$$

$$\pi \equiv x - y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = [(1+a), -(1+a), (a^2-1)] \\ \overrightarrow{v_\pi} = (1, -1, 0) \end{cases} \Rightarrow \frac{1+a}{1} = \frac{-(1+a)}{-1} = \frac{a^2-1}{0} \Rightarrow \left\{ \frac{1+a}{1} = \frac{a^2-1}{0} \right. \Rightarrow$$

$$a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2 puntos.
Dado el punto **P(2 , 1 , -1)**, determine el punto simétrico de **P** respecto al plano que pasa por los puntos **A(0 , 2 , -1)**, **B(1, -3 , 0)** y **C(2 , 1 , 1).**

Para determinar el plano π debemos de halla los vectores **AB**, **AC** y **AG**, siendo **G** el punto generador del plano, como los tres son coplanarios y este último es combinación lineal de los otros dos, el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación pedida del plano.
Determinado el plano hallaremos una recta **r** que pase por **P** y sea perpendicular al plano, siendo su vector director el del plano, calcularemos el punto **Q** que es la intersección del plano y la recta **r** y que es el punto medio entre **P** y su simétrico **P'**

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, -3, 0) - (0, 2, -1) = (1, -5, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (2, 1, 1) - (0, 2, -1) = (2, -1, 2) \\ \overrightarrow{AG} = (x, y, z) - (0, 2, -1) = (x, y-2, z+1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z+1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-10x + 2(y-2) - (z+1) + 10(z+1) + x - 2(y-2) = 0 \Rightarrow -9x + 9(z+1) = 0 \Rightarrow 9x - 9z - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv x - z - 1 = 0$$

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_\pi} = (1, 0, -1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow (2+\lambda) - (-1-\lambda) - 1 = 0 \Rightarrow 2 + \lambda + 1 + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$2\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow Q \begin{cases} x = 2 + (-1) \\ y = 1 \\ z = -1 - (-1) \end{cases} \Rightarrow Q(1, 1, 0) \Rightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{2 + x_{P'}}{2} \Rightarrow 2 + x_{P'} = 2 \Rightarrow x_{P'} = 0 \\ 1 = \dfrac{1 + y_{P'}}{2} \Rightarrow 1 + y_{P'} = 2 \Rightarrow y_{P'} = 1 \\ 0 = \dfrac{-1 + z_{P'}}{2} \Rightarrow -1 + z_{P'} = 0 \Rightarrow z_{P'} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$P'(0, 1, 1)$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1 : Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 3x + y + mz = 1 \\ x - y + 2z = -2 \\ 5x + (m+1)y + 2z = 4 \end{cases}$ se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro **m**.
b) (0.5 puntos) Resolverlo en el caso **m = 0**.
c) (0.5 puntos) Resolverlo en el caso **m = 2**.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & m \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & m+1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & m-6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & m+6 & -8 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 4 & m-6 \\ m+6 & -8 \end{vmatrix} = -[-32-(m+6)(m-6)]$$

$$|A| = -[-32-(m^2-36)] = -(-32-m^2+36) = -(-m^2+4) \Rightarrow m^2-4=0 \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow m^2-4=0 \Rightarrow$$

$$m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} m=-2 \\ m=2 \end{cases}$$

$$\forall m \in \Re - \{-2\ ,\ 2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ m=-2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ 8 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A/B) = 3 \Rightarrow$$

$Sistema\ Incompatible$

$Si\ m=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 8 & 0 & 8 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2 < Número\ incognitas$$

$Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$

$b)$

$Si\ m=0 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 6 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow -8+2z=-1 \Rightarrow 2z = 7 \Rightarrow$$

$$z = \frac{7}{2} \Rightarrow -2 - y + \frac{14}{2} = -2 \Rightarrow y = \frac{14}{2} = 7 \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = \left(-2\ ,\ 7\ ,\ \frac{7}{2}\right)$$

Continuación del Ejercicio 1 de la opción B

$c)$

$$Si\ m=2 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 4x+4z=-1 \Rightarrow 4x=-1-4z \Rightarrow x=-\frac{1}{4}-z \Rightarrow -\frac{1}{4}-z-y+2z=-2 \Rightarrow$$

$$y=2-\frac{1}{4}+z \Rightarrow y=\frac{7}{4}+z \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z)=\left(-\frac{1}{4}-\lambda\,,\,\frac{7}{4}+\lambda\,,\,\lambda\right)$$

Ejercicio 2 : Calificación máxima: 3 puntos.
Se consideran los puntos **A(0 , 5 , 3)**, **B(0 , 6 , 4)**, **C(2 , 4 , 2)** y **D(2 , 3 , 1)** y se pide:
a) (1 punto) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios y que el polígono **ABCD** es un paralelogramo.
b) (1 punto) Calcular el área de dicho paralelogramo.
c) (1 punto) Determinar el lugar geométrico de los puntos **P** cuya proyección sobre el plano **ABCD** es el punto medio del paralelogramo.

a) El producto mixto de los vectores **AB**, **AC** y **AD**, que es el volumen del paralelogramo que determinan debe de ser nulo, ya que son coplanarios.
Después estudiaremos que puntos determinan vectores que son paralelos.

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(0\,,6\,,4)-(0\,,5\,,3)=(0\,,1\,,1) \\ \overrightarrow{AC}=(2\,,4\,,2)-(0\,,5\,,3)=(2\,,-1\,,-1) \\ \overrightarrow{AD}=(2\,,3\,,1)-(0\,,5\,,3)=(2\,,-2\,,-2)=(1\,,-1\,,-1) \end{array}\right. \Rightarrow V=\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|=0 \Rightarrow$$

$$V=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow Dos\ filas\ iguales \Rightarrow V=0 \Rightarrow Son\ coplanarios$$

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(0\,,1\,,1) \\ \overrightarrow{BC}=(2\,,4\,,2)-(0\,,6\,,4)=(2\,,-2\,,-2)\equiv(1\,,-1\,,-1) \\ \overrightarrow{CD}=(2\,,3\,,1)-(2\,,4\,,2)=(0\,,-1\,,-1)=(0\,,1\,,1) \\ \overrightarrow{AD}=(1\,,-1\,,-1) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD} \end{array}\right. \Rightarrow Es\ un\ paralelogramo$$

b) El área del paralelogramo es igual al módulo del producto vectorial de **AB** y **AC**

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(0\,,6\,,4)-(0\,,5\,,3)=(0\,,1\,,1) \\ \overrightarrow{AC}=(2\,,4\,,2)-(0\,,5\,,3)=(2\,,-1\,,-1) \end{array}\right. \Rightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}+\vec{i}=2\vec{j}-2\vec{k} \Rightarrow$$

$$A=\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\ u^2$$

Continuación del Ejercicio 2 de la opción B

c) Sera una recta perpendicular al plano, cuyo vector directos se halla como el producto vectorial de los vectores AB y AC y que pase por el punto P punto medio de AC por ejemplo (o BD)

$$\begin{cases} \begin{cases} \overrightarrow{AB}=(0,1,1) \\ \overrightarrow{AC}=(2,-1,-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{j}-2\vec{k}=(0,2,-2)\equiv(0,1,-1) \\ \begin{cases} x_P=\dfrac{0+2}{2}=1 \\ y_P=\dfrac{5+4}{2}=\dfrac{9}{2} \\ z_P=\dfrac{3+2}{2}=\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow P\left(1,\dfrac{9}{2},\dfrac{5}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow r\equiv\begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{9}{2}+\lambda \\ z=\dfrac{5}{2}-\lambda \end{cases}$$

Ejercicio 3 : Calificación máxima: 2 puntos.

a) (1 punto) Determine el polinomio f(x), sabiendo que f’’’(x) = 12, para todo $x\in\Re$ y además verifica: f(1) = 3 ; f’(1) = 1 ; f’’(1) = 4.

b) (1 punto) Determine el polinomio g(x), sabiendo que g’’(x) = 6, para todo $x\in\Re$ y que además verifica:

$$\int_0^1 g(x)\,dx=5 \quad , \quad \int_0^2 g(x)\,dx=14$$

$a)$

$$f''(x)=\int 12\,dx=12x+C\Rightarrow f''(1)=4\Rightarrow 12\cdot 1+C=4\Rightarrow C=-8\Rightarrow f''(x)=12x-8$$

$$f'(x)=\int(12x-8)\,dx=\frac{1}{2}\cdot 12x^2-8x+K\Rightarrow f'(1)=1\Rightarrow 6\cdot 1^2-8\cdot 1+K=1\Rightarrow K=3\Rightarrow f''(x)=6x^2-8x+3$$

$$f(x)=\int(6x^2-8x+3)\,dx=\frac{1}{3}\cdot 6x^3-\frac{1}{2}\cdot 8\cdot x^2+3x+Q\Rightarrow f(1)=3\Rightarrow 2\cdot 1^3-4\cdot 1^2+3\cdot 1+Q=3\Rightarrow Q=2$$

$$f(x)=2x^3-4x^2+3x+2$$

$b)$

$$g'(x)=\int 6\,dx=6x+C\Rightarrow g(x)=\int(6x+C)\,dx=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot x^2+Cx+K=3x^2+Cx+K$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1(3x^2+Cx+K)\,dx=\left[\frac{1}{3}\cdot 3x^3+\frac{1}{2}\cdot Cx^2+Kx\right]_0^1=\left(1^3+\frac{1}{2}\cdot C\cdot 1^2+K\cdot 1\right)-\left(0^3+\frac{1}{2}\cdot C\cdot 0^2+K\cdot 0\right)=1+\frac{C}{2}+K \\ \displaystyle\int_0^2(3x^2+Cx+K)\,dx=\left[\frac{1}{3}\cdot 3x^3+\frac{1}{2}\cdot Cx^2+Kx\right]_0^2=\left(2^3+\frac{1}{2}\cdot C\cdot 2^2+K\cdot 2\right)-\left(0^3+\frac{1}{2}\cdot C\cdot 0^2+K\cdot 0\right)=8+2C+2K \end{cases}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx=5\Rightarrow 1+\frac{C}{2}+K=5\Rightarrow 2+C+2K=10\Rightarrow C+2K=8 \\ \displaystyle\int_0^2 g(x)\,dx=14\Rightarrow 8+2C+2K=14\Rightarrow 2C+2K=6\Rightarrow C+K=3 \end{cases}\Rightarrow K=5\Rightarrow C+5=3\Rightarrow C=-2\Rightarrow$$

$$g(x)=3x^2-2x+5$$

Ejercicio 4 : Calificación máxima: 2 puntos.

Estudie la continuidad y la derivabilidad en **x = 0** y en **x = 1** de $f(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x\le 0 \\ |x\ln x| & si \quad x>0 \end{cases}$, donde **ln** denota el logaritmo neperiano.

$$|x\ln x|>0 \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ \ln x>0 \Rightarrow x>e^0 \Rightarrow x>1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x\le 0 \\ -x\ln x & si \quad 0<x<1 \\ x\ln x & si \quad x\ge 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-x\ln x=-0\cdot(-\infty)=0\cdot\infty=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{\infty}{-\dfrac{1}{0}}=-\dfrac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{-1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0 \end{cases}$$

$$f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=0 \Rightarrow Es\ continua\ \ en\ x=0$$

$$f'(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ -\ln x+\dfrac{1}{x}\cdot(-x) & si \quad x<1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ -(\ln x+1) & si \quad 0<x<1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=-(\ln x+1)=-(-\infty)=\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f'(x)\ne \lim_{x\to 0^+} f'(x) \Rightarrow No\ es\ derivable\ \ en\ x=0$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-x\ln x=-1\cdot\ln 1=0 \\ f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1\cdot\ln 1=0 \end{cases} \Rightarrow f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=0 \Rightarrow Es\ continua\ \ en\ x=1$$

$$f'(x)=\begin{cases} -(\ln x+1) & si \quad 0<x<1 \\ \ln x+1 & si \quad x>1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=-(\ln 1+1)=-(0+1)=-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\ln 1+1=0+1=1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f'(x)\ne \lim_{x\to 0^+} f'(x) \Rightarrow No\ es\ derivable\ \ en\ x=1$$