

A1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a :
$$\begin{cases} x + ay + z = a+1 \\ -ax + y - z = 2a \\ -y + z = a \end{cases}$$

Se pide:

- a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a .
 b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $a = 0$.

Solución

(a)

Discutir el sistema según los diferentes valores de a .

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -a & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a+1 \\ -a & 1 & -1 & 2a \\ 0 & -1 & 1 & a \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

Tenemos $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -a & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ -a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{tercera fila}}{=} 1(0 + a(a+1)) = a(a+1)$.

De $|A| = 0$, tenemos $a(a+1) = 0$, de donde $a = 0$ y $a = -1$.

Si $a \neq 0$ y $a \neq -1$, $|A| \neq 0$ con lo cual $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = \text{número de incógnitas}$, y por el Teorema de Rouché, el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

Si $a = 0$, tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, $\text{rango}(A) = 2$.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos columnas iguales, $\text{rango}(A^*) = 2$.

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < \text{número de incógnitas}$, por el Teorema de Rouché el sistema es compatible e indeterminado y tiene más de una solución, en nuestro caso infinitas.

Si $a = -1$, tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$, $\text{rango}(A) = 2$.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \underset{C_2+C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{primera fila}}{=} 1 \cdot (-2-2) = -4 \neq 0$, $\text{rango}(A^*) = 3$.

Como $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$, por el Teorema de Rouché el sistema es incompatible y no tiene solución.

(b)

Resolver el sistema para $a = 0$.

Hemos visto que en este caso el rango es 2, por tanto con dos ecuaciones es suficiente, tomamos las dos primeras:

$\begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$, tomamos $z = m \in \mathbb{R}$, con lo cual $y = m$ y $x = 1 - m$. **La solución del sistema es:**

$(x, y, z) = (1 - m, m, m)$ con $m \in \mathbb{R}$.

A2. Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$, se pide:

a) (0.5 puntos) Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo $[1, 10]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con pendiente mínima.

c) (1 punto) Calcular $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx$.

Solución

(a)

Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo [1, 10] en el que ambas funciones toman el mismo valor.

El Teorema de Bolzano nos dice: Si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y toma valores de signo opuesto en los extremos a y b del intervalo, entonces existe al menos un punto interior $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Sea la función $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 3x^2 - 1 - 6x = x^3 + 3x^2 - 6x - 1$.

La función h(x) es continua en R, en particular en el cerrado [1, 10].

Tenemos $h(1) = 1^3 + 3(1)^2 - 6(1) - 1 = -2 < 0$; $h(10) = (10)^3 + 3(10)^2 - 6(10) - 1 = 1239 > 0$. Como h(x) cumple las condiciones del Teorema de Bolzano en [1, 10], **existe al menos un punto interior $c \in (1, 10)$ que verifica $h(c) = 0$, es decir $f(c) - g(c) = 0$, es decir $f(c) = g(c)$.**

(b)

Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con pendiente mínima.

Nos primero que estudiemos la monotonía de $f'(x)$.

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$; $f'(x) = 3x^2 + 6x$; $f''(x) = 6x + 6$.

De $f''(x) = 0$, tenemos $6x + 6 = 0$, luego $x = -1$ que será el posible extremo de $f'(x)$.

Como $f''(-2) = 6(-2) + 6 = -6 < 0$, **$f'(x)$ es estrictamente decreciente (\searrow) en $(-\infty, -1)$.**

Como $f''(0) = 6(0) + 6 = 6 > 0$, **$f'(x)$ es estrictamente creciente (\nearrow) en $(-1, +\infty)$.**

Por definición $x = -1$ es un mínimo relativo de $f'(x)$.

La recta tangente en $x = -1$ es " $y - f(-1) = f'(-1)(x + 1)$ ". Tenemos $f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 1 = 1$, análogamente $f'(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) = -3$, por tanto la recta es $y - 1 = (-3)(x + 1)$, es decir **$y = -3x - 2$.**

(c)

Calcular $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx$.

Tenemos $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{6x} dx = \frac{1}{6} \int_1^2 \left(x^2 + 3x - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{6} \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - \ln|x| \right]_1^2 =$
 $= (1/6) \cdot [(8/3 + 6 - \ln(2)) - (1/3 + 3/2 - 0)] = (1/6) \cdot (41/6 - \ln(2)) \cong 1'02336$.

A3. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular la posición relativa de las rectas r y s.

b) (0.5 puntos) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto P(2, -1, 5).

c) (1 punto) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s.

Solución

(a)

Calcular la posición relativa de las rectas r y s.

En $r \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases}$ tomando $x = m \in R$, tenemos $r \equiv \begin{cases} x = m \\ y = -2 + m \\ z = 1 + 3m \end{cases}$. Un punto de r es A(0, 2, -1) y un vector

director es $u = (1, 1, 3)$; de s un punto es el B(-1, -4, 0) y un vector director $v = (2, -1, 1)$. $AB = (-1, -6, 1)$. Como u y un vector director v no son proporcionales las rectas se cortan o se cruzan.

Si $\det(AB, u, v) = 0$, las rectas se cortan en un punto y si $\det(AB, u, v) \neq 0$ las rectas se cruzan.

Como $\det(\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} -1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_2+F_1 \\ F_3+2F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & -6 & 1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & -13 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} = (-1)(-15+52) = -37 \neq 0, \text{ las rectas } r \text{ y } s \text{ se} \\ \text{columna} \end{matrix}$

cruzan en el espacio.

(b)

Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $P(2, -1, 5)$.

El plano π perpendicular a r tiene por vector normal el director de la recta, $\mathbf{n} = \mathbf{u} = (1, 1, 3)$

$\pi \equiv \mathbf{PX} \bullet \mathbf{u} = (x - 2, y + 1, z - 5) \bullet (1, 1, 3) = x - 2 + y + 1 + 3z - 15 = \mathbf{x + y + 3z - 16 = 0.}$

(c)

Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s .

Para un plano π' necesitamos un punto, el $B(-1, -4, 0)$ (π' contiene a s) y dos vectores independientes uno el $\mathbf{v} = (2, -1, 1)$. (π' contiene a s) y el $\mathbf{u} = (1, 1, 3)$ (π' es perpendicular a s).

$\pi' \equiv \det(\mathbf{BX}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} x+1 & y+4 & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} = (x+1)(-3-1) - (y+4)(6-1) + z(2+1) = -4x - 5y + 3z - 24 = 0. \\ \text{fila} \end{matrix}$

A4. Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30%. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40%, en el tercero del 50% y en el cuarto del 60%. Se pide:

- a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.
- b) (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.
- c) (1 punto) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85% de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

Solución

(a)

(1 punto) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.

Sean A_1, A_2, A_3 y A_4 los sucesos “acertar en el primer disparo”, “acertar en el segundo disparo”, “acertar en el tercer disparo” y “acertar en el cuarto disparo”.

Del problema sabemos que $p(A_1) = 30\% = 0'3$, $p(A_2) = 40\% = 0'4$, $p(A_3) = 50\% = 0'5$ y $p(A_4) = 60\% = 0'6$,

Me piden **$p(\text{acertar sin necesidad de hacer el cuarto disparo}) = p(A_1) + p(A_1^c \cap A_2) + p(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) = (0'3) + (0'7)(0'4) + (0'7)(0'6)(0'5) = 0'79.$**

b)

Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.

Me piden **$p(\text{fallar los cuatro disparos}) = p(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c) = (0'7)(0'6)(0'5)(0'4) = 0'084.$**

(c)

En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85% de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

Recordamos que si realizamos n veces (10) un experimento en el que podemos obtener éxito, F , con probabilidad p ($p(F) = 0'85$) y fracaso, F^c , con probabilidad q ($q = 1 - p = 1 - 0'85 = 0'15$), diremos que estamos ante una distribución binomial de parámetros n y p , y lo representaremos por **$B(n;p)$** .

Es decir nuestra variable **X sigue una binomial $B(n;p) = B(10; 0'85)$** .

En este caso la **probabilidad de obtener k éxitos**, que es su **función de probabilidad**, viene dada por:

$$p(X = k) = (10 \text{ sobre } k) \cdot 0'85^k \cdot 0'15^{(10-k)} = \binom{10}{k} \cdot 0'85^k \cdot 0'15^{(10-k)}.$$

** $(n \text{ sobre } k) = \binom{n}{k} = (n!)/(k! \cdot (n - k)!)$ con $n!$ el factorial de “ n ”. En la calculadora “ n tecla **nCr** k ”

En nuestro caso piden $p(X = 6) = \binom{10}{6} \cdot 0'85^6 \cdot 0'15^4 = \frac{10!}{6! \cdot 4!} \cdot 0'85^6 \cdot 0'15^4 \cong 0'0400957$.

$$= 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0'9^{20} - 10 \cdot 0'1^1 \cdot 0'9^{19} \cong 1 - 0'34768 - 0'38742 = 0'2649.$$

B1. Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275'8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63'6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.

Solución

De "se vendieron 7400 toneladas rodaballos, por un valor de 63'6 millones de euros":

$$\text{Precio del kilo rodaballo} = \frac{63600000}{7400000} = 8'59459 \text{ €/kg}$$

De por un total de 275'8 millones de euros menos 63'6 millones de euros de los rodaballos nos quedan 212'2 millones de euros para doradas y lubinas.

x = Precio del kilo de doradas.

y = Precio del kilo de lubinas.

De "el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina" $\rightarrow x = y + 0'11 \text{ €}$.

De "de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas, con 211'9 millones de euros para doradas y lubinas" $\rightarrow 13740000(y + 0'11) + 23440000y = 212200000$, tenemos:

$37180000y = 210688600$, luego $y = (210688600)/(37180000) = 5'667$, es decir **el precio del kilo de lubinas es de 5'667 €/kg.**

El precio del kilo de dorada = (5'6667 + 0'11) €/kg = 5'7767 €/kg.

B2. Sea la función $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

a) (0.5 puntos) Estudie su continuidad en $[-4, 4]$.

b) (1 punto) Analice su derivabilidad y crecimiento en $[-4, 4]$.

c) (1 punto) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ está definida, es continua y es derivable en $x = 1$.

Solución

(a)

Estudie su continuidad en $[-4, 4]$.

$(x-1)^2$ es continua y derivable en \mathbb{R} , en particular continua en $[-4, 1)$ y derivable en $(1, 4]$.

$(x-1)^3$ es continua y derivable en \mathbb{R} , en particular continua en $(1, -4]$ y derivable en $(1, 4)$.

Veamos la continuidad en $x = 1$, es decir si $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

Tenemos $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)^2 = 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^3 = 0$, **por tanto f(x) es continua en $x = 1$ y**

por tanto en el cerrado $[-4, 4]$.

$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, **por tanto f(x) no es continua en $x = 0$.**

(b)

Analice su derivabilidad y crecimiento en $[-4, 4]$.

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}; f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si } x < 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Veamos la derivabilidad en $x = 1$, es decir si $f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = f'(1^+)$. Vamos a ver la continuidad de la derivada.

Tenemos $f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 \cdot (x-1) = 0$; $f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3 \cdot (x-1)^2 = 0$, **por tanto f(x) es derivable en $x = 1$ y por tanto en el abierto $(-4, 4)$.**

$$\text{Tenemos } f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si } x \leq 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Vemos que $f'(x)$ se anula en $x = 1$, que será un posible extremo.

Como $f'(0) = 2(0-1) = -2 < 0$, **$f(x)$ es estrictamente decreciente (\searrow) en $(-4, 1)$.**

Como $f'(2) = 2(2-1)^2 = 2 > 0$, **$f(x)$ es estrictamente creciente (\nearrow) en $(1, 4)$.**

Por definición $x = 1$ es un mínimo relativo de $f(x)$ y vale $f(1) = 0$.

(c)

Determine si la función $g(x) = f'(x)$ está definida, es continua y es derivable en $x = 1$.

$$\text{Tenemos } g(x) = f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si } x \leq 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}, \quad g'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ 6(x-1) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Veamos la continuidad en $x = 1$, es decir si $g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$.

Tenemos $g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2(x-1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 \cdot (x-1) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3(x-1)^2 = 0$, **por tanto $g(x)$ es continua en $x = 1$.**

$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, **por tanto $f(x)$ no es continua en $x = 0$.**

Veamos la derivabilidad en $x = 1$, es decir si $g'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g'(x) = g'(1^+)$. Vamos a ver la continuidad de la derivada.

Tenemos $g'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 = 2$; $g'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 6 \cdot (x-1) = 0$, **como $g'(1^-) = 2 \neq g'(1^+) = 0$, $g(x)$ no es derivable en $x = 1$.**

B3. Dados los puntos $P(-3, 1, 2)$ y $Q(-1, 0, 1)$ y el plano π de ecuación $x + 2y - 3z = 4$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la proyección de Q sobre π .

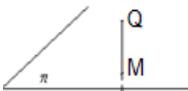
b) (0.5 puntos) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P .

c) (1 punto) Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q .

Solución

(a)

Hallar la proyección de Q sobre π .



(i) Calculamos la recta r que pasa por Q y es perpendicular al plano π , luego su vector director $\mathbf{u} = \mathbf{n} = (1, 2, -3)$. La ponemos en paramétricas o vectorial $r \equiv (x, y, z) = (-1 + m, 2m, 1 - 3m)$ con $m \in \mathbb{R}$.

(ii) Calculamos la proyección ortogonal M de Q sobre el plano π , es decir $M = r \cap \pi$

$(-1 + m) + 2(2m) - 3(1 - 3m) = 4 \rightarrow 14m = 8$, de donde $m = 8/14 = 4/7$, **y el punto proyección ortogonal pedido es $M(-1 + (4/7), 2(4/7), 1 - 3(4/7)) = M(-3/7, 8/7, -5/7)$.**

(b)

Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P .

Los planos paralelos a π son de la forma $x + 2y - 3z + K = 0$. Como $P(-3, 1, 2)$ pertenece al plano tenemos que $(-3) + 2(1) - 3(2) + K = 0$, de donde $K = 7$ **y el plano pedido es $x + 2y - 3z + 7 = 0$.**

(c)

Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q .

Para el plano π' necesitamos un punto, el $P(-3, 1, 2)$ dos vectores independientes el $\mathbf{PQ} = (2, -1, -1)$; porque el plano contiene a la recta que pasa por P y Q ; y el $\mathbf{n} = (1, 2, -3)$; porque el plano es perpendicular a π .

$$\pi' \equiv \det(\mathbf{PX}, \mathbf{PQ}, \mathbf{n}) = \begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z-2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = (x+3)(3+2) - (y-1)(-6+1) + (z-2)(4+1) =$$

$$= 5x + 5y + 5z + 0 = 0 \Rightarrow x + y + z = 0.$$

B4. Se consideran dos sucesos A y B tales que $p(A) = 0'5$, $p(B) = 0'25$ y $p(A \cap B) = 0'125$. Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

a) (0.5 puntos) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B . ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$?

b) (0.5 puntos) ¿Son A y B independientes?

c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad $p(A^c \cap B^c)$ (donde A^c denota el suceso complementario al suceso A).

d) (0.75 puntos) Calcular $p(B^c/A)$.

Solución

(a)

Sea C otro suceso, incompatible con A y con B. ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$?

Como C es incompatible con A $\rightarrow p(A \cap C) = 0$, luego $A \cap C = \phi$.

Como C es incompatible con B $\rightarrow p(B \cap C) = 0$, luego $B \cap C = \phi$.

C es incompatible con $A \cup B$ si $(A \cup B) \cap C = \phi$, pero $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \phi \cup \phi$. **Luego C y $A \cup B$ son incompatibles.**

(b)

¿Son A y B independientes?

A es independiente de B si $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

Tenemos $p(A \cap B) = 0'125 = p(A) \cdot p(B) = (0'5) \cdot (0'25) = 0'125$, luego A es independiente de B.

(c)

Calcular la probabilidad $p(A^c \cap B^c)$ (donde A^c denota el suceso complementario al suceso A).

Tenemos $p(A^c \cap B^c) = \{\text{Ley de Morgan}\} = p(A \cup B)^c = \{\text{suceso contrario}\} = 1 - p(A \cup B) = \{++\} = 1 - 0'625 = 0'375$.

$\{++\} = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0'5 + 0'25 - 0'125 = 0'625$.

(d)

Calcular $p(B^c/A)$.

$$p(B^c/A) = \frac{p(B^c \cap A)}{p(A)} = \frac{p(A) - p(A \cap B)}{p(A)} = (0'5 - 0'125)/(0'5) = 0'75.$$

Por tanto $p(A/B) = \frac{p(B \cap A)}{p(B)} = 0'22/0'35 \cong 0'62857$