A1. Sea A una matriz de tamaño 3x4 tal que sus dos primeras filas son (1, 1, 1, 1) y (1, 2, 3, 4), y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz A que verifique la condición pedida, **justificándolo apropiadamente**:
a) (0.5 puntos) La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.
b) (0.5 puntos) Las tres filas de A son linealmente independientes.
c) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.
d) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.
e) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.

Solución

(a)
La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.

Tenemos la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\x&y&z&t\end{pmatrix}$ donde $F_1 = (1, 1, 1, 1)$, $F_2 = (1, 2, 3, 4)$ y $F_3 = (x, y, z, t)$. También nos dicen que $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ y $t \neq 0$.

Como F_3 tiene que ser combinación lineal de F_1 y F_2, resulta $\mathbf{F_3 = \alpha\cdot F_1 + \beta\cdot F_2 =}$ {elegimos $\alpha = \beta = 1$} = $\mathbf{= 1\cdot F_1 + 1\cdot F_2 =}$ $1\cdot(1, 1, 1, 1) + 1\cdot(1, 2, 3, 4)$ **= (2, 3, 4, 5).**

La matriz pedida es $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\2&3&4&5\end{pmatrix}$.

(b)
Las tres filas de A son linealmente independientes.

Es suficiente que encontremos un menor de orden 3 distinto de cero en A. **Partimos de la matriz del apartado (a) y cambiamos el elemento a_{31} por 1, es decir** $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&4&5\end{pmatrix}$**.**

Como $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&4\end{vmatrix}\begin{matrix}\\F_2-F_1\\F_3-F_1\end{matrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&2&3\end{vmatrix}\begin{matrix}\text{Adjuntos}\\\text{primera}\\\text{columna}\end{matrix} = 1(3-4) = -1 \neq 0$, **rango(A) = 3 y las tres filas de A son linealmente independientes.**

(c)
A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.

Nos puede servir la matriz del apartado (b) $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&4&5\end{pmatrix}$ porque rango (A) = 3 = rango $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&4\end{pmatrix}$, **que coincidiría con el número de incógnitas**, y por el Teorema de Rouchè, **el sistema sería compatible y determinado y tendría solución única**.

(d)
A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.

Nos puede servir la matriz del apartado (a) $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\2&3&4&5\end{pmatrix}$ pues al ser F1 y F2 linealmente independientes, y F_3 combinación lineal de F_1 y F_2, tenemos **rango(F_1, F_2) = rango(A) = 2 < número de incógnitas**, por el Teorema de Rouchè el **sistema sería compatible e indeterminado y tendría más de una solución, en nuestro caso infinitas.**

(e)
A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.

Si en la matriz del aparatado (a) $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\2&3&4&5\end{pmatrix}$ cambiamos el elemento a_{34} por 1 tenemos la matriz

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, en la cual rango $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 2$ ($F_3 = 1\cdot F_1 + 1F_2$) y en A utilizando columna 1, 2 y 4 resulta: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ C_2-C_1 \\ C_3-C_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila $= 1(-1 - 3) = -2 \neq 0$, con lo cual **rango(A*) = 3** $\neq$ rango $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 2$, por el Teorema de Rouchè, **el sistema sería incompatible y no tendría solución.**

A2. Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si} \quad x<1,\ x\neq 1 \\ \dfrac{x^2+1}{4x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular f(0) y (fof)(0).
b) (1.25 puntos) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f(x) en x = 1 y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.
c) (0.75 puntos) Estudiar sus asíntotas.

Solución

(a)

Calcular f(0) y (fof)(0).

Tenemos f(0) = -1/-1 **= 1**, **y (fof)(0) =** f(f(0)) **= f(1) = (1+1)/4 = 1/2**.

(b)

Estudiar la continuidad y derivabilidad de f(x) en x = 1 y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.

$\dfrac{x-1}{x^2-1}$ es continua y derivable en R - {-1, 1}, en particular continua en (x < 1) - {-1}, x ≠ 1, y derivable en (x < 1) - {-1}, x ≠ 1.

$\dfrac{x^2+1}{4x}$ es continua y derivable en R - {0}, en particular continua en x > 1, y derivable en x > 1.

Veamos la continuidad en x = 1, es decir si $f(1) = \lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x)$.

Tenemos $f(1) = \lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \dfrac{x^2+1}{4x} = 2/4 = 1/2$; $\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \dfrac{x-1}{x^2-1} = \left\{\dfrac{0}{0}, \text{L'Hôpital}\right\} = \lim_{x\to 1-} \dfrac{1}{2x} = 1/2$., **por tanto f(x) es continua en x = 1.**

Veamos la derivabilidad en x = 1, es decir si $f'(1-) = \lim_{x\to 1-} f'(x) = \lim_{x\to 1+} f'(x) = f'(1+)$. Vamos a ver la continuidad de la derivada.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si} \quad x<1,\ x\neq 1 \\ \dfrac{x^2+1}{4x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}; \quad f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1\cdot(x^2-1)-2x\cdot(x-1)}{(x^2-1)^2} & \text{si} \quad x<1,\ x\neq 1 \\ \dfrac{2x\cdot 4x-4\cdot(x^2+1)}{(4x)^2} & \text{si} \quad x>1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{-x^2+2x-1}{(x^2-1)^2} & \text{si} \quad x<1,\ x\neq 1 \\ \dfrac{4x^2-4}{(4x)^2} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Tenemos

$$f'(1-) = \lim_{x\to 1-} f'(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{-x^2+2x-1}{(x^2-1)^2} = \left\{\frac{0}{0}, \text{L'Hôpital}\right\} = \lim_{x\to 1-} \frac{-2x+2}{2(x^2-1)\cdot 2x} = \left\{\frac{0}{0}, \text{L'Hôpital}\right\} = \lim_{x\to 1-} \frac{-2}{4(x^2-1)+2x\cdot 4x} =$$

$= \dfrac{-2}{0+8} = -1/4.$; $f'(1+) = \lim_{x\to 1+} f'(x) = \lim_{x\to 1+} \dfrac{4x^2-4}{(4x)^2} = 0/16 = 0$, **por tanto f(x) no es derivable en x = 1 porque** $f'(1-) = \lim_{x\to 1-} f'(x) = -1/4 \neq \lim_{x\to 1+} f'(x) = f'(1+) = 0$.

Como $f'(0) = \dfrac{-1}{(-1)^2} = -1/1 = -1 < 0$, **f(x) es estrictamente decreciente** (↘) **en (-1, 1).**

Como $f'(2) = \dfrac{4(2)^2-4}{(4\cdot 2)^2} = \dfrac{12}{64} = 3/16 > 0$, **f(x) es estrictamente creciente** (↗) **en (1, +∞).**

Por definición en x = 1 es un mínimo relativo de f(x) y vale f(1) = 1/2 (calculado antes)**.**
(c)
Estudiar sus asíntotas.

Si x < 1 y x ≠ 1, $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$ y su dominio era R - {-1,1}.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ *, la recta x = a es una asíntota vertical de f(x).*

Como $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \left(\dfrac{x - 1}{x^2 - 1}\right) = \dfrac{-2}{0^+} = -\infty$, **la recta x = -1 es una asíntota vertical de f.**

Posición relativa: $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \left(\dfrac{x - 1}{x^2 - 1}\right) = \dfrac{-2}{0^-} = +\infty$.

Vimos que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(\dfrac{x - 1}{x^2 - 1}\right) = 1/2$, **luego la recta x = 1 no es una asíntota vertical de f.**

Como la función f es una cociente de funciones polinómicas, con el grado del numerador menor que el grado del denominador, sabemos que tiene la asíntota horizontal y = 0 en -∞, por tanto no tiene asíntota oblicua en -∞.

Veámoslo: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x - 1}{x^2 - 1}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x}{x^2}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{-\infty} = 0^-$, **la recta y = 0 es una asíntota horizontal de la gráfica de f en -∞, y en -∞ la gráfica de f está por debajo de la asíntota horizontal y = 0.**

Como $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(-x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4(-x)}{1 + (-x)^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-4x}{1 + x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-4}{x}\right) = \dfrac{-4}{+\infty} = 0^-$, **la gráfica de f está por debajo de la asíntota horizontal y = 0 en -∞.**

Como tiene una asíntota horizontal y = 0, y es la misma en -∞, no tiene asíntotas oblicuas en -∞.

Si x ≥ 1, $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{4x}$ y su dominio era R (en x > 1).

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ *, la recta x = a es una asíntota vertical de f(x).*

La función <u>no tiene</u> una asíntota vertical de f.

Como la función f es una cociente de funciones polinómicas, con el grado del numerador uno más que el grado del denominador, sabemos que tiene la asíntota oblicua y = mx + n en +∞, sii $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) – (mx+n)]=0$,

con $m = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to+\infty} [f(x) – mx]$, por tanto no tiene horizontal en +∞.

Sabemos qué en cociente de polinomios rápidamente la asíntota oblicua (A.O.) se obtiene dividiendo numerador entre el denominador y la asíntota es el cociente.

Rápidamente

$$\begin{array}{l|l} x^2 + 1 & 4x \\ \hline -x^2 & x/4 + 0 \\ \hline 1 & \end{array} \quad \textbf{A.O. y = x/4}$$

Vamos a comprobar que la A.O es y = mx + n = x/4

m = $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + 1}{4x^2} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{4x^2} = \lim_{x\to+\infty} (1/4)$ **= 1/4**.

$n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2 + 1}{4x} - x/4\right) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + 1 - x^2}{4x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{4x} = 0^+$.

Luego la A.O. es y = x/4 en +∞, y la gráfica de f está por encima de la A.O. y = x/4 en +∞.

Como tiene una asíntota oblicua y = x/4 en +∞, no tiene asíntotas horizontales en +∞.

A3. Dados el punto P(3, 3, 0) y la recta $r \equiv \dfrac{x - 2}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z + 1}{0}$, se pide:

a) (0.75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.
b) (1 punto) Calcular el punto simétrico de P respecto de r.

c) (0.75 puntos) Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $3/\sqrt{(2)}$ y el ángulo recto en A.

Solución

(a)

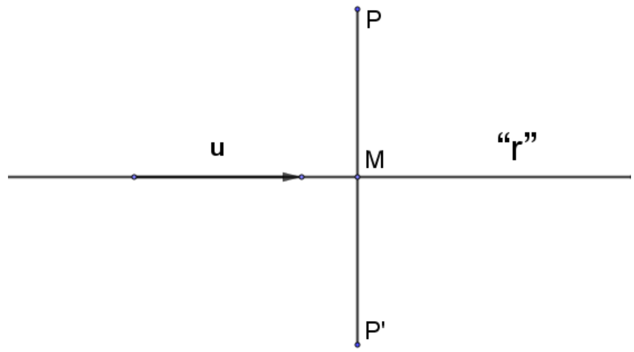
Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.

Para un plano π necesitamos un punto, el P(3, 3, 0), y dos vectores independientes uno el **u** = (-1, 1, 0) (π contiene a r) y el **AP** con A(2, 0 -1) punto de r**, AP** = (1, 3, 1).

$$\pi \equiv \mathbf{det(PX, u, AP)} = \begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = (x-3)(1-0) - (y-3)(-1-0) + z(-3-1) \mathbf{= x + y - 4z - 6 = 0}.$$

(b)

Calcular el punto simétrico de P respecto de r.



Tomamos punto genérico M de la recta (en vectorial), formamos el vector **PM** y le imponemos la condición de perpendicularidad a dos vectores, uno el **PM** y otro el director **u** de la recta “r”.
Obtenemos el parámetro, el punto de corte M de la proyección ortogonal, y el simétrico P’ se obtiene sabiendo que M es el punto medio del segmento PP’.

Tenemos un punto genérico de la recta M($2 - \lambda$, λ, -1) con $\lambda \in$ R, formamos el vector **PM** = ($2- \lambda-3$, $\lambda-3$, -1) = = ($-1 - \lambda$, $-3 + \lambda$, -1) y le imponemos la condición de que sea perpendicular a la recta “r” es decir a su vector de dirección **u** = (-1, 1, 0), por tanto **AP•u** = 0 $\rightarrow$ ($-1 - \lambda$, $-3 + \lambda$, -1)•(-1, 1, 0) = 0 =$1 + \lambda - 3 + \lambda = 0$, de donde $\lambda = 1$ y M es M(2 - (1), (1), -1) = M(1, 1, -1).

Como M(1, 1, -1) es el punto medio del segmento PP’, tenemos:
M(1, 1, -1) = ((x + 3)/2, (y + 3)/2, (z + 0)/2), de donde x = -1, y = -1 y z = -2, es decir **el punto simétrico pedido es P(-1, -1, -2).**

(c)

Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $3/\sqrt{(2)}$ y el ángulo recto en A.

A y B son puntos genéricos de r, luego A(2 - m, m, -1) y B(2 - n, n, -1) con m, n $\in$ R.

Como el triángulo es rectángulo en A los vectores **AB** y **AP** son perpendiculares y su producto escalar (•) es cero.

AB = **b** – **a** = (2 - n, n, -1) - (2 - m, m, -1) = (m - n, n - m, 0). **AP** = (1 + m, 3 - m, 1).

Tenemos **AB•AP =** 0 = (1 + m, 3 - m, -1)• (m - n, n - m, 0) = (1 + m)(m - n) + (3 - m)(n - m) + 0 =
= (m - n)(1 + m - 3 + m) = (m - n)(-2 + 2m) = 0, de donde m = n y m = 1.

Si m = n tendríamos **AB** = (0, 0, 0) y no existiría triángulo por ser A = B, luego **m = 1** con lo cual resultaría que **AB** = (1 - n, n - 1, 0). **AP** = (2, 2, 1).

Recordamos que en un triángulo rectángulo su área es (1/2)·(cateto)·(cateto) en nuestro caso:
Área = $3/\sqrt{(2)} = (1/2)\cdot||\mathbf{AB}||\cdot||\mathbf{AP}|| = (1/2)\cdot\sqrt{((1-n)^2+(n-1)^2 + 0^2)}\cdot\sqrt{(2^2+2^2+1^2)}$.

Elevando al cuadrado tenemos: $9/2 = (1/4)\cdot(1-n)^2+(n-1)^2\cdot(9) = (1/4)\cdot 2\cdot(n-1)^2\cdot(9)$, de donde $(n-1)^2 = 1$, es decir $(n – 1) = \pm\sqrt{(1)} = \pm 1$, por tanto **n = 2 y n = 0**.

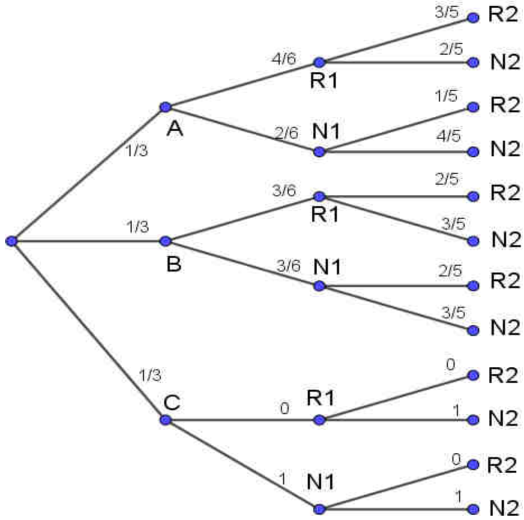
Para m = 1 y n = 0, puntos A(1, 1, -1) y B(2, 0, -1).
Para m = 1 y n = 2, puntos A(1, 1, -1) y B(0, 2, -1).

A4. Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 negras, la urna B contiene 3 bolas de cada color y la urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento. Se pide:
a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.
b) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra.
c) (0.5 puntos) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.
Solución
(a)
Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.

Sean A, B, C, R1, R2, N1 y N2 los sucesos "urna A", "urna B", "urna C", "1ª bola extraída es roja", "2ª bola extraída es roja", "1ª bola extraída es negra" y "2ª bola extraída es negra".

Del problema sabemos que: p(A) = p(B) = p(C) = 1/3, p(R1/A) = 4/6, p(R1/B) = 3/6, p(R1/C) = 0, p(R2/A) = = 3/5, p(R2/B) = 2/5, p(R1/C) = 0,…..

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Me piden **p(primera bola extraída sea roja) = p(R1)**
Por el teorema de la Probabilidad Total:
Me piden **p(R1) =** p(A).p(R1/A) + p(B).p(R1/B) + p(C).p(R1/C) =
= (1/3)·(4/6) + (1/3)·(3/6) + (1/3)·(0) **= 7/18 ≅ 0'388889**.
(b)
Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra.

Me piden **p(primera roja y segunda negra) = p(R1 y N2) = p(R1∩N2)**.

Mirando el árbol tenemos:
Me piden **p(R1∩N2) =** p(A)·p(R1/A)·p(N2/R1) + p(B)·p(R1/B)·p(N2/R1) + p(C).p(R1/C)·p(N2/R1) =
= (1/3)·(4/6)·(2/5) + (1/3)·(3/6)·(3/5) + (1/3)·(0)(1) **= 17/90 = 0'188889**.
(c)
Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.

Me piden **p(segunda negra si la primera ha sido roja) = p(N2/R1).**

Teniendo en cuenta la Probabilidad condicionada y los aparatados (b) y (a) resulta:

$$\mathbf{p(N2/R1) =} \frac{p(R1 \cap N2)}{p(R1)} \mathbf{= (17/90) / (7/18) = 17/35 \cong 0'4857143}.$$

B1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}0&-1&2\\2&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1 puntos) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A.
b) (0.5 puntos) Calcular la matriz $C = A^2 - 2I$.
c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz $D = ABB^t$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

Solución

(a)

Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A.

Sabemos que existe $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$ si $det(A) = |A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix}0&-1&2\\2&1&-1\\1&0&1\end{vmatrix} \begin{matrix}\\ C_3 - C_1\\ \end{matrix} = \begin{vmatrix}0&-1&2\\2&1&-3\\1&0&0\end{vmatrix} \begin{matrix}\text{Adjuntos}\\ \text{tercera}\\ \text{fila}\end{matrix} = 1\cdot(3-2) = 1 \neq 0.$$

$$A^t = \begin{pmatrix}0&2&1\\-1&1&0\\2&-1&1\end{pmatrix},\ Adj(A^t) = \begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&-2&4\\-1&-1&2\end{pmatrix},\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A^t) = \frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&-2&4\\-1&-1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&-2&4\\-1&-1&2\end{pmatrix}.$$

(b)

Calcular la matriz $C = A^2 - 2I$.

$$C = A^2 - 2I = \begin{pmatrix}0&-1&2\\2&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1&2\\2&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1&3\\1&-1&2\\1&-1&3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&-1&3\\1&-3&2\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

(c)

Calcular el determinante de la matriz $D = ABB^t$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

$$D = A\cdot B\cdot B^t = \left(\begin{pmatrix}0&-1&2\\2&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&2\\5&-3\\2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4&-1&2\\13&5&-3\\4&2&0\end{pmatrix}.$$

Tenemos $\mathbf{det(D) = |D| =} \begin{vmatrix}-4&-1&2\\13&5&-3\\4&2&0\end{vmatrix} \begin{matrix}\\ C_1 - 2C_2\\ \end{matrix} = \begin{vmatrix}-2&-1&2\\3&5&-3\\0&2&0\end{vmatrix}$ **= 0, por tener dos columnas proporcionales.**

B2. La potencia generada por una pila viene dada por la expresión $P(t) = 25t\cdot e^{-t^2/4}$, donde $t > 0$ es el tiempo de funcionamiento.

a) (0.5 puntos) Calcular hacia qué valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.
b) (0.75 puntos) Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.
c) (1.25 puntos) La energía total generada por la pila hasta el instante t, E(t), se relaciona con la potencia mediante $E'(t) = P(t)$, con $E(0) = 0$. Calcular la energía producida por la pila entre el instante $t = 0$ y el instante $t = 2$.

Solución

(a)

Calcular hacia qué valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.

Me piden $\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(25t\cdot e^{-t^2/4}\right) = \lim_{t\to+\infty}\frac{25t}{e^{+t^2/4}} = \left\{\frac{+\infty}{+\infty}; \text{L'Hôpital}\right\} = \lim_{t\to+\infty}\frac{25}{e^{+t^2/4}\cdot(t/2)} = \frac{25}{+\infty} = 0$, **por tanto la potencia generada tiende a cero.**

(b)

Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.

Nos piden los extremos de $P(t) = 25t\cdot e^{-t^2/4}$, $P'(t) = 25\cdot e^{-t^2/4} + 25t\cdot e^{-t^2/4}\cdot(-2t/4) = 25\cdot e^{-t^2/4}\cdot(1 - t^2/2)$..

De $P'(t) = 0 \rightarrow 25\cdot e^{-t^2/4}\cdot(1 - t^2/2) \rightarrow t^2 = 2 \rightarrow t = \pm\sqrt{(2)}$, pero como $t > 0$ solo queda $t = +\sqrt{(2)} \cong 1'414$.

Como $P'(1) = 25\cdot e^{-1/4}\cdot(1 - 1/2) \cong 9'735 > 0$, **f(x) es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (0, 1).**

Como P '(2) = $50\cdot e^{-1}\cdot(1 - 2) \cong - 18'394 < 0$, **f(x) es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (1, +∞).**

Por definición t = +√(2) es un máximo relativo de P(t) y vale P(+√(2)) = 25·√(2)·e$^{-1/2}$ ≅ 21'444.

(c)

La energía total generada por la pila hasta el instante t, E(t), se relaciona con la potencia mediante E '(t) = = P(t), con E(0) = 0. Calcular la energía producida por la pila entre el instante t = 0 y el instante t = 2.

Nos piden E(2) – E(0) con $E(t) = \int P(t)dt = \int 25t\cdot e^{-t^2/4}dt$.

Calculamos primero E(t) con E(0) = 0.

$$E(t) = \int P(t)dt = \int 25t\cdot e^{-t^2/4}dt = \begin{Bmatrix} -t^2/4 = x \\ (-t/2)dt = dx \\ tdt = -2dx \end{Bmatrix} = \int -2\cdot 25\cdot e^x dx = -50e^x + K = \begin{Bmatrix} \text{Quito} \\ \text{cambio} \end{Bmatrix} = -50e^{-t^2/4} + K.$$

Como E(0) = 0, 0 = -50·e^0 + K, de donde K = 50 y **la energía total es E(t) =** $-50e^{-t^2/4} + 50$ **.**

La energía pedida es $\int_0^2 25t\cdot e^{-t^2/4}dt = \left[-50e^{-t^2/4} + 50\right]_0^2 = (-50\cdot e^{-1} + 50) - (-50\cdot e^0 + 50)$ **= 50 - 50/e J ≅ 31'606 J**.

B3. Del paralelogramo ABCD, se conocen los vértices consecutivos A(1, 0, -1), B(2, 1, 0) y C(4, 3, -2). Se pide:

a) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC.

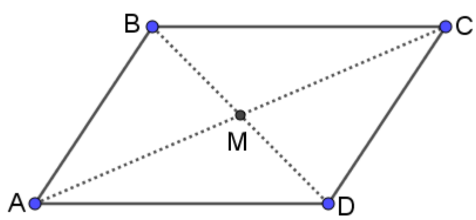
b) (1 punto) Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.

c) (0.5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores **AB** y **AC**.

Solución

(a)

Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC.



El punto medio del segmento AC es M((1+4)/2, (0+3)/2, (-1-2)/2) = M(5/2, 3/2, -3/2).

El vector perpendicular a los vectores **AC** = (3, 3, -1) y **BC** = (2, 2, -2) es **u** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila =

= **i**(-6-2) - **j**(-6+2) + **k**(6-6) = (-8, 4, 0).

La recta r pedida, que pasa por M y tiene vector directo u es: r ≡ $\begin{cases} x = 5/2 - 8m \\ y = 3/2 + 4m \\ z = -3/2 \end{cases}$ **con m ∈ R.**

(b)

Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.

Como tenemos un paralelogramo **BC** = **AD** → (2, 2, -2) = (x - 1, y, z + 1) de donde **D(x, y, z) = D(3, 2, -3).**

Sabemos que el área de un paralelogramo es el módulo (||| ||) del producto vectorial (x) de dos vectores del paralelogramo con origen común, en este caso ||**AD**x**AB**||.

AD = (2, 2, -2); **AB** = (1, 1, 1); **AD**x**AB** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = **i**(2+2) - **j**(2+2) + **k**(2-2) = (4, -4, 0).

El área pedida es: ||**AD**x**AB**|| = $\sqrt{(4)^2+(4)^2+(0)^2}$ u^2 **= √(32) u^2 = 4√(2) u^2 ≅ 5'65685 u^2.**

(c)

Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores **AB** y **AC**.

Sabemos que cos(<**AB, AC**>) = (**AB•AC**)/(||**AB**||·||**AC**||).
Tenemos **AB** = (1, 1, 1) y **AC** = (3, 3, -1); **AB•AC** = (1, 1, 1)•(3, 3, -1) = 3 + 3 - 1 = 5.
||**AB**|| = $\sqrt{((1)^2+(1)^2+(1)^2)} = \sqrt{(3)}$; ||**AD**x**AB**|| = $\sqrt{((3)^2+(3)^2+(1)^2)} = \sqrt{(19)}$, luego **el coseno pedido es**:

cos(<**AB, AC**>) = (**AB•AC**)/(||**AB**||·||**AC**||) = $4/\sqrt{(3\cdot 19)}$ **=** $\mathbf{4/\sqrt{(57)} \cong 0'662266}$.

B4. En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes X, Y: Sabemos que P(X) = 0'4 y que $P(X\cap Y^C)$ = 0'08 (donde Y^C es el suceso complementario de Y). Se pide:
a) (1 punto) Calcular P(Y).
b) (0.5 puntos) Calcular $P(X\cup Y)$.
c) (1 punto) Si X es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede X, y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.
Solución
(a)
Calcular P(Y).

Como X es independiente de Y tenemos: $p(X\cap Y) = p(X)\cdot p(Y) = 0'4\cdot p(Y)$.

De $P(X\cap Y^C) = 0'08 = P(X) - P(X\cap Y) = 0'4 - P(X\cap Y)$, resulta $P(X\cap Y) = 0'4 - 0'08 = 0'32$, por tanto **la probabilidad pedida es: p(Y) =** $p(X\cap Y)/0'4 = 0'32/0'4$ **= 4/5 = 0'8.**
b)
Calcular $P(X\cup Y)$.

Tenemos $\mathbf{p(X\cup Y)} =$ $p(X) + p(Y) - p(X\cap Y) = 0'4 + 0'8 - 0'32$ **= 22/25 = 0'88**.
(c)
Si X es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede X, y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.

Recordamos que si realizamos **n** veces (8) un experimento en el que podemos obtener éxito, X^C, con probabilidad **p** ($p(X^C) = 1 – p(X) = 1 – 0'4 = 0'6$) y fracaso, F^C, con probabilidad **q** (q = 1 – p = 1 – 0'6 = 0'4), diremos que estamos ante una distribución binomial de parámetros **n** y **p**, y lo representaremos por **B(n; p)**.

Es decir nuestra variable **W sigue una binomial B(n; p)** = **B(8; 0'6)**.

En este caso la **probabilidad de obtener k éxitos**, que **es su función de probabilidad**, viene dada por:

$$\mathbf{p(W = k) = (8\text{ sobre }k)\cdot 0'6^k\cdot 0'4^{(8-k)} = \binom{8}{k}\cdot 0'6^k\cdot 0'4^{(8-k)}}.$$

** (n sobre k) = $\binom{n}{k}$ = (n!)/((k!·(n - k)!) con n! el factorial de "n". En la calculadora " n tecla **nCr** k "

En nuestro caso piden **p(tener éxito al menos 2 veces) = p(W ≥ 2) =1 - p(W < 2) =**1 - p(W = 0) - p(W = 1) **=**

= $1 - \binom{8}{0}\cdot 0'6^0\cdot 0'4^{(8)} - \binom{8}{1}\cdot 0'6^1\cdot 0'4^{(7)} = 1 – 0'00065536 – 0'0078432$ **= 0'99150144**.