UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

Curso **2020-2021** **MATERIA**: MATEMÁTICAS II

A1. (2'5 puntos) Tres amigas, Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15000 seguidores en una red social. Si Jimena perdiera el 25% de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara. Además, la mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena. Calcule cuántos seguidores tiene cada una de las tres amigas.

Sean las incógnitas S seguidores de Sara, C de Cristina y J de Jimena

$$\begin{cases} S+C+J=15000 \\ \dfrac{75}{100}J=3S \\ \dfrac{1}{2}S+\dfrac{1}{5}C=\dfrac{1}{4}J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S+C+J=15000 \\ 300S-75J=0 \\ 20S+8C=10J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S+C+J=15000 \\ 4S-J=0 \\ 10S+4C-5J=0 \end{cases} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 10 & 4 & -5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 15 & 9 & 0 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 15 & 9 \end{vmatrix}=30\neq 0$$

Sistema Compatible Determinado

$$S=\frac{\begin{vmatrix} 15000 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix}}{30}=\frac{15000\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}}{30}=\frac{15000\cdot 4}{30}=\frac{60000}{30}=2000 \text{ seguidores}$$

$$C=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 15000 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 10 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{30}=\frac{(-15000)\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 10 & -5 \end{vmatrix}}{30}=\frac{(-15000)\cdot(-10)}{30}=\frac{150000}{30}=5000 \text{ seguidores}$$

$$J=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 15000 \\ 4 & 0 & 0 \\ 10 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{30}=\frac{15000\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 10 & 4 \end{vmatrix}}{30}=\frac{15000\cdot 16}{30}=\frac{150000}{30}=8000 \text{ seguidores}$$

Solución $\Rightarrow$ (Sara , Cristina , Jimena)=(2000 , 5000 , 8000) seguidores

A2. (2' 5 puntos) a) (1.25 puntos) Calcule, en caso de existir, el valor de los siguientes límites:

a.1) (0'5 puntos) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\text{sen}(x)}$ a.2) (0'75 puntos) $\lim\limits_{x\to\infty 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{\text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)}\right)$

(**Indicación**: use el cambio de variable t = 1/x donde sea necesario).

b) (1.25 puntos) Calcule las siguientes integrales:

b.1) (0'5 puntos) $\int\dfrac{x}{x^2-1}dx$ b.2) (0'75 puntos) $\int_0^1 x^2e^{-x}dx$

*a*1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\text{sen}(x)}=\frac{0^2\cdot(1-2\cdot 0)}{0-2\cdot 0^2-\text{sen}(0)}=\frac{0\cdot(1-0)}{0-0-0}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{\textit{Utilizando L'Hopital}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x(1-2x)-2x^2}{1-4x-\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-4x^2-2x^2}{1-4x-\cos(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-6x^2}{1-4x-\cos(x)}=\frac{2\cdot 0-6\cdot 0^2}{1-4\cdot 0-\cos(0)}=\frac{0-0}{1-0-1}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{\textit{Utilizando L'Hopital}}=\lim_{x\to 0}\frac{2-12x}{-4+\text{sen}(x)}=\frac{2-12\cdot 0}{-4+\text{sen}(0)}=\frac{2-0}{-4+0}=-\frac{1}{2}$$

*a*2)

$$\frac{1}{x}=t\Rightarrow x\to\infty\Rightarrow t=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}\right)=\lim_{t\to 0}t\left(3t-\frac{2}{sen\,(t)}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{3t^2sen\,(t)-2t}{sen\,(t)}=\frac{3\cdot 0^2sen\,(0)-2\cdot 0}{sen\,(0)}=\frac{3\cdot 0\cdot 0-0}{0}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{\textit{Utilizando L'Hopital}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{6t\cdot sen\,(t)+3t^2\cos(t)-2}{\cos(t)}=\frac{6\cdot 0\cdot sen\,(0)+3\cdot 0^2\cdot\cos(0)-2}{\cos 0}=\frac{6\cdot 0\cdot 0+3\cdot 0\cdot 1-2}{1}=\frac{0+0-2}{1}=-2$$

*b*1)

$$\int\frac{x}{x^2-1}dx=\int\frac{\frac{dt}{2}}{t}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\cdot\ln(t)=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2-1\right)=\ln\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}=\ln\left(\sqrt{x^2-1}\right)+K$$

$$x^2-1=t\Rightarrow 2x\,dx=dt\Rightarrow x\,dx=\frac{dt}{2}$$

*b*2)

$$\int x^2e^{-x}dx=-x^2e^{-x}-\int\left(-e^{-x}\right)\cdot 2x\,dx=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}\,dx=-x^2e^{-x}+2\left[-xe^{-x}-\int\left(-e^{-x}\right)\cdot dx\right]=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}+2\int e^{-x}dx=$$

$$\begin{cases} x^2=u\Rightarrow 2x\,dx=du \\ e^{-x}dx=dv\Rightarrow v=\int e^{-x}dx=-\int e^{t}dt=-e^{t}=-e^{-x}\end{cases}\qquad\begin{cases} x=u\Rightarrow dx=du \\ e^{-x}dx=dv\Rightarrow v=\int e^{-x}dx=-\int e^{t}dt=-e^{t}=-e^{-x}\end{cases}$$

$$-x=t\Rightarrow -dx=dt\Rightarrow dx=-dt$$

$$\int x^2e^{-x}dx=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}=-e^{-x}\left(x^2+2x+2\right)+K$$

$$\int_0^1 x^2e^{-x}dx=-\left[e^{-x}\left(x^2+2x+2\right)\right]_0^1=-\left[e^{-1}\left(1^2+2\cdot 1+2\right)-e^{-0}\left(0^2+2\cdot 0+2\right)\right]=-\left[5e^{-1}-1\cdot 2\right]=-\left(\frac{5}{e}-2\right)=-\left(\frac{5-2e}{e}\right)$$

$$\int_0^1 x^2e^{-x}dx=\frac{2e-5}{e}$$

A3. Dado el punto A(1, 0, -1), la recta $r \equiv x - 1 = y + 1 = \dfrac{z-2}{2}$ y el plano $\pi \equiv x + y - z = 6$, se pide:

a) (0.75 puntos) Hallar el ángulo que forman el plano π y el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A.
b) (0.75 puntos) Determinar la distancia entre la recta r y el plano π.
c) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por A, forma un ángulo recto con la recta r y no corta al plano π.

a) El vector director del plano β es el de la recta que es perpendicular al vector AG, siendo G el punto genérico del plano, y su producto escalar es nulo y la ecuación buscada
El coseno del ángulo que forman los planos es el producto escalar de ambos vectores directores entre el producto de sus módulos

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\beta} = \overrightarrow{v_r} = (1,1,2) \\ \overrightarrow{AG} = (x\,,y\,,z) - (1\,,0\,,-1) = (x-1\,,y\,,z+1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\beta} \perp \overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\beta} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \Rightarrow (1,1,2)\cdot(x-1,y\,,z+1) = 0 \Rightarrow$$

$$x-1+y+2z+2=0 \Rightarrow \beta \equiv x+y+2z+1=0$$

$$\cos\theta = \frac{\left|\overrightarrow{v_\beta}\cdot\overrightarrow{v_\pi}\right|}{\left|\overrightarrow{v_\beta}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_\pi}\right|} = \frac{\left|(1,1,2)\cdot(1,1,-1)\right|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|1+1-2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}} = \frac{0}{\sqrt{18}} = 0 \Rightarrow \theta = \text{arc cos } 0 = 90º = \frac{\pi}{2}\,rad$$

b) Primero veremos si el plano y la recta son paralelos, el producto escalar de los dos vectores directores, que son perpendiculares, tiene que ser cero, si lo son hallaremos la distancia de un punto R cualquiera de la recta (tomaremos el indicado en su ecuación) respeto al plano, hallando una recta s perpendicular a este que pase por el punto R y su vector director el del plano π, el modulo del vector PR, donde P es el punto de corte del plano y la recta, es la distancia pedida

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1,1,2) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (1,1,-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_\pi} = (1,1,2)\cdot(1,1,-1) = 1+1-2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{v_\pi} \Rightarrow \text{La recta es paralela al plano } \pi$$

$$R(1,-1,2) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = 2-\lambda \end{cases} \Rightarrow 1+\lambda-1+\lambda-2+\lambda = 6 \Rightarrow -2+3\lambda = 6 \Rightarrow 3\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = \frac{8}{3} \Rightarrow$$

$$P\begin{cases} x = 1+\frac{8}{3} \\ y = -1+\frac{8}{3} \\ z = 2-\frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{11}{3},\frac{5}{3},-\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{PR} = (1,-1,2) - \left(\frac{11}{3},\frac{5}{3},-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{8}{3},-\frac{8}{3},\frac{8}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\text{d}(r\,,\pi) = \left|\overrightarrow{PR}\right| = \sqrt{\left(-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{3\cdot 64}{9}} = \sqrt{\frac{64}{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\,u$$

A4. En una urna hay dos bolas blancas y cuatro bolas negras. Se extrae una bola al azar. Si la bola extraída es blanca, se devuelve a la urna y se añade otra bola blanca; si es negra, no se devuelve a la urna. A continuación, se vuelve a extraer una bola al azar de la urna.
a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color?
b) (1.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca?

(a)
¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color?

Llamemos B_i y N_j a los sucesos siguientes, “sacar bola blanca en el lugar “i” " y “sacar bola negra en el lugar “j” ", respectivamente.

Datos del problema: $p(B_1) = 2/6$ (ahora hay 3 blancas y 4 negras); $p(B_2/B_1) = 3/7$; $p(N_2/B_1) = 4/7$, $p(N_1) = 4/6$ (ahora hay 3 negras y 2 blancas); $p(N_2/N_1) = 3/5$; $p(B_2/N_1) = 2/5$...

Me piden **p(dos bolas de distinto color) = p(blanca y negra o negra y blanca) =**
= $p(B_1 \cap N_2) + p(N_1 \cap B_2)$ = $(2/6)\cdot(4/7) + (4/6)\cdot(2/5)$ **= 16/35 ≅ 0’4571428.**

(b)
¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca?

Me piden **p(primera bola negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca) = $p(N_1/B_2)$ =**
= $[p(N_1 \cap B_2)]/p(B_2)$ = $[\ p(N_1)\cdot(p(B_2/N_1)\ ] / [\ p(B_1)\cdot p(B_2/B_1) + p(N_1)\cdot p(B_2/N_1)\ ]$ =
= $[\ (4/6)\cdot(2/5)\ ] / [\ (2/6)\cdot(3/7) + (4/6)\cdot(2/5)\ ]$ **= 28//43 ≅ 0’65116279.**

B1. a) (0.75 puntos) Encuentre un único sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x e y, que tenga como soluciones {x = 1, y = 2} y {x = 0, y = 0}.
b) (1 punto) Encuentre un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x, y y z cuyas soluciones sean, en función del parámetro $\lambda \in$ R: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda - 2 \\ z = \lambda - 1 \end{cases}$
c) (0.75 puntos) Encuentre un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, x e y, que solo tenga como solución a x = 1 e y = 2.

a)
Es una ecuación homogénea que verifica las dos soluciones del tipo

a)

$x - 2y = 0 \Rightarrow$ *La otra una ecuación lineal proporcional a ella* $\Rightarrow 5x - 10y = 0$

b)

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda - 2 \\ z = \lambda - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ z = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 13 \\ 8 \cdot 1 + 2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 5y = 13 \\ 8x + y = 10 \\ 5x - 4y = -3 \end{cases}$$

B2. Sea la función f(x) = x^3 - |x| + 2.
a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en x = 0.
b) (1 punto) Determine los extremos relativos de f(x) en la recta real.
c) (0.75 puntos) Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y = 0, y las rectas x = -1 y x = 1.

a)

$$x > 0 \Rightarrow x^3 - (-x) + 2 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 2 & si \quad x < 0 \\ x^3 - x + 2 & si \quad x \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0^3 + 0 + 2 = 2 \\ f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0^3 - 0 + 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$Como\ f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 2 \Rightarrow \text{Es continua en x = 0}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & si \quad x < 0 \\ 3x^2 - 1 & si \quad x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = 3 \cdot 0^2 + 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 3 \cdot 0^2 - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 1 \ne \lim_{x \to 0^+} f'(x) = -1 \Rightarrow$$

No es derivable en x = 0

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\dfrac{1}{3}} \Rightarrow \text{Sin solución} \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{3}} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \\ x = -\sqrt{\dfrac{1}{3}} < 0 \Rightarrow \text{No solución} \end{cases} \end{cases}$$

$$f''(x) = 6x \Rightarrow f''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo}$$

$$\text{Mínimo en x =} \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 2 = \frac{3\sqrt{3}}{27} - \frac{\sqrt{3}}{3} + 2 = \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 18}{9} = \frac{2\left(9 - \sqrt{3}\right)}{9}$$

$$\text{Puntos de corte con } OX \Rightarrow f(x) = 0 = \begin{cases} x^3 + x + 2 = 0 \\ x^3 - x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & & -1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \Rightarrow x^3 + x + 2 = (x+1)\left(x^2 - x + 2\right) \Rightarrow x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0 \Rightarrow \text{No solución}$$

$$x^3 + x + 2 = (x+1)\left(x^2 - x + 2\right) = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$x^3 - x + 2 = 0 \Rightarrow \text{No solución} \Rightarrow \text{Comprobado por Ruffini}$$

$$x = -\frac{1}{2} \in (-1, 0) \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{-1 - 4 + 16}{8} = \frac{11}{8} > 0 \Rightarrow \text{Positivo en x} \in (-1, 0)$$

$$x = \frac{1}{2} \in (0, 1) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{1 - 4 + 16}{8} = \frac{13}{8} > 0 \Rightarrow \text{Positivo en x} \in (0, 1)$$

$$A = \int_{-1}^{0} \left(x^3 + x + 2\right) dx + \int_{0}^{1} \left(x^3 - x + 2\right) dx = \frac{1}{4} \cdot \left[x^4\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_{-1}^{0} + 2 \cdot [x]_{-1}^{0} + \frac{1}{4} \cdot \left[x^4\right]_{0}^{1} - \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_{0}^{1} + 2 \cdot [x]_{0}^{1}$$

$$A = \frac{1}{4} \cdot \left[0^4 - (-1)^4\right] + \frac{1}{2} \cdot \left[0 - (-1)\right] + 2 \cdot \left[0 - (-1)\right] + \frac{1}{4} \cdot \left(1^4 - 0^4\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(1^2 - 0^2\right) + 2 \cdot (1 - 0)$$

$$A = \frac{1}{4} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 1 + 2 \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2 + 2 = 4\ u^2$$

B3. Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}$, $s \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{cases}$.

a) (1.5 puntos) Escriba una ecuación de la recta perpendicular común a r y a s.
b) (1 punto) Calcule la distancia entre r y s.
a) Llamando rs la recta que se apoya en las dos y es perpendicular a ambas, el vector director de esta recta es perpendicular a los vectores directores de r y de s, sus productos escalares son nulos

$$\left\{\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = -4-3\lambda \end{cases} \\ x{=}2-z \Rightarrow -4+2z+y-2z=1 \Rightarrow y=5 \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2-\mu \\ y = 5 \\ z = \mu \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \overrightarrow{v_{rs}} = (2-\mu\,,5\,,\mu)-(2+\lambda\,,-1+\lambda\,,-4-3\lambda)$$

$$\overrightarrow{v_{rs}}{=}(-\mu-\lambda\,,6-\lambda\,,\mu+3\lambda+4) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_{rs}} \perp \overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{v_{rs}}\cdot\overrightarrow{v_r}=0 \Rightarrow (-\mu-\lambda\,,6-\lambda\,,\mu+3\lambda+4)\cdot(1,1,-3)=0 \\ \overrightarrow{v_{rs}} \perp \overrightarrow{v_s} \Rightarrow \overrightarrow{v_{rs}}\cdot\overrightarrow{v_s}=0 \Rightarrow (-\mu-\lambda\,,6-\lambda\,,\mu+3\lambda+4)\cdot(-1,0,1)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\mu-\lambda+6-\lambda-3\mu-9\lambda-12=0 \\ \mu+\lambda+\mu+3\lambda+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\mu-11\lambda-6=0 \\ 2\mu+4\lambda+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\mu-11\lambda-6=0 \\ \mu+2\lambda+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\mu-11\lambda-6=0 \\ 4\mu+8\lambda+8=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-3\lambda+2=0 \Rightarrow -3\lambda=-2 \Rightarrow \lambda=\frac{2}{3} \Rightarrow \mu+2\cdot\frac{2}{3}+2=0 \Rightarrow \mu+\frac{10}{3}=0 \Rightarrow \mu=-\frac{10}{3}$$

$$\overrightarrow{v_{rs}} = \left(\frac{10}{3}-\frac{2}{3}\,,6-\frac{2}{3}\,,-\frac{10}{3}+3\cdot\frac{2}{3}+4\right) = \left(\frac{8}{3}\,,\frac{16}{3}\,,\frac{8}{3}\right) \equiv (1,2,1) \Rightarrow \text{Punto de corte en r} \Rightarrow R\begin{cases} x = 2+\frac{2}{3} \\ y = -1+\frac{2}{3} \\ z = -4-3\cdot\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$R\left(\frac{8}{3}\,,-\frac{1}{3}\,,-6\right) \Rightarrow \text{Recta rs} \equiv \begin{cases} x = \frac{8}{3}+\eta \\ y = -\frac{1}{3}+2\eta \\ z = -6+\eta \end{cases}$$

b)

$$\textit{Punto de corte en s} \Rightarrow S\begin{cases} x = 2-\left(-\frac{10}{3}\right) \\ y = 5 \\ z = -\frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow S\left(\frac{16}{3}\,,5\,,-\frac{10}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{RS} = \left(\frac{16}{3}\,,5\,,-\frac{10}{3}\right)-\left(\frac{8}{3}\,,-\frac{1}{3}\,,-6\right) = \left(\frac{8}{3}\,,\frac{14}{3}\,,\frac{8}{3}\right)$$

$$d(r,s) = \left|\overrightarrow{RS}\right| = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{14}{3}\right)^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{324}{9}} = \sqrt{36} = 6\ u$$

B4. Según las estadísticas meteorológicas, en una ciudad nórdica llueve un promedio del 45% de los días. Un climatólogo analiza los registros pluviométricos de 100 días elegidos al azar entre los de los últimos 50 años.
a) (1 punto) Exprese cómo calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.
b) (1.5 puntos) Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal.

(a)
Exprese cómo calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.

Recordamos que si realizamos **n** veces (100) un experimento en el que podemos obtener éxito, **F** (llover en un determinado día), con probabilidad **p** (p(F) = 45% = 0'45) y fracaso, $\mathbf{F^C}$ (no llover), con probabilidad **q** (**q** = 1 – **p** = 1 – 0'45 = 0'55), diremos que la variable **X**, llover en un determinado día, sigue una distribución binomial de parámetros **n** y **p**, y lo representaremos por **B(n; p)**.

Es decir nuestra variable **X sigue una binomial B(n; p)** = **B(100; 0'45)**.

En este caso la **probabilidad de obtener k éxitos**, que **es su función de probabilidad**, viene dada por:

$$\mathbf{p(X = k) = (100 \text{ sobre } k)\cdot 0'45^{k}\cdot 0'55^{(100-k)} = \binom{100}{k}\cdot 0'45^{k}\cdot 0'55^{(100-k)}.}$$

****** (n sobre k) = $\binom{n}{k}$ = (n!)/(k!.(n - k)!) con n! el factorial de "n". En la calculadora " n tecla **nCr** k "

Me piden $\mathbf{p(X = 40) = \binom{100}{40}\cdot 0'45^{40}\cdot 0'55^{(60)} \cong 0'04880290316}$

(b)
Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal.

Como $n\cdot p = 100\cdot 0'45 = 45 \geq 5$ y $n\cdot q = 100\cdot 0'55 = 55 \geq 5$. **La variable X que sigue una binomial B(n;p) = = B(100; 0'45), se puede aproximar por la variable X ' que sigue una normal N(μ, σ) = N(n·p,√(npq)) = = N(45, √(45·0'55)) = N(45, 4'9749) ≅ N(45, 5)**

Como X es una distribución discreta y X ' es una distribución continua tenemos que aplicarle las correcciones de Yates: p(X ≤ k) = p(X' ≤ x+0,5); p(X < x) = p(X' < x-0.5); p(X=x) = p(x-0,5≤ X' ≤ x+0,5); p(a ≤ X ≤ b) = p(a-0'5 ≤ X' ≤ b+0'5) etc…

En nuestro caso **p(X = 40) = p(39'5 ≤ X '≤ 40'5) =** {Tipificamos} = $p\left(\frac{39'5 - 45}{5} \leq Z \leq \frac{40'5 - 45}{5}\right)$ **=**
= p(-1'1 ≤ Z ≤ -0'9) = {por simetría} = p(0'9 ≤ Z ≤ 1'1) = p(Z ≤ 1'1) - p(Z ≤ 0'9) =
= 0'8643 – 0'8159 = 0'0484 (se discrepa en las diezmilésimas al aproximarla por la normal)**.**