UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

Curso **2021-2022** **MATERIA**: MATEMÁTICAS II

A1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una estantería de una biblioteca hay ensayos, novelas y biografías. Tres de cada dieciséis libros de la estantería son ensayos. Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas. Si retiráramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarían ciento cinco libros. Calcule el número de libros de cada clase que hay en la estantería.

Sean E los ensayos, N las novelas y B las biografías

$$\begin{cases} \frac{3}{16}(E+N+B)=E \\ B+\frac{E}{3}=N+2 \\ (E+N+B)-\frac{E}{2}-\frac{N}{5}=105 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(E+N+B)=16E \\ 3B+E=3N+6 \\ 10E+10N+10B-5E-2N=1050 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13E-3N-3B=0 \\ E-3N+3B=6 \\ 5E+8N+10B=1050 \end{cases}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 13 & -3 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \\ 5 & 8 & 10 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 36 & -42 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 23 & -5 \end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix} 36 & -42 \\ 23 & -5 \end{vmatrix}=-(-180+966)=-786\neq 0$$

$$E=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 6 & -3 & 3 \\ 1050 & 8 & 10 \end{vmatrix}}{-786}=\frac{-9450-144-9450+180}{-786}=\frac{-18864}{-786}=24;\quad N=\frac{\begin{vmatrix} 13 & 0 & -3 \\ 1 & 6 & 3 \\ 5 & 1050 & 10 \end{vmatrix}}{-786}=\frac{780-3150+90-40950}{-786}=\frac{-43230}{-786}=55$$

$$B=\frac{\begin{vmatrix} 13 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 6 \\ 5 & 8 & 1050 \end{vmatrix}}{-786}=\frac{-40950-90-624+3150}{-786}=\frac{-38514}{-786}=49;\quad \text{Solución} \Rightarrow (E\,,N\,,B)=(24\,,55\,,49)\ \text{libros}$$

A2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x)=\begin{cases} \frac{2x+1}{x} & x<0 \\ x^2-4x+3 & x\geq 0 \end{cases}$.

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad de f(x) en R.
b) (0.25 puntos) ¿Es f(x) derivable en x = 0? Justifique la respuesta.
c) (0.75 puntos) Calcule, si existen, las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.
d) (0.75 puntos) Determine para $x \in (0, \infty)$ el punto de la gráfica de f(x) en el que la pendiente de la recta tangente es nula y obtenga la ecuación de la recta tangente en dicho punto. En el punto obtenido, ¿alcanza f(x) algún extremo relativo? En caso afirmativo, clasifíquelo.

a)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\frac{2\cdot 0+1}{0}=\frac{1}{0}\Rightarrow \text{Sin solución} \\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0^2-4\cdot 0+3=3 \end{cases} \Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=3\neq \lim_{x\to 0^-} f(x)=\infty \Rightarrow \text{Discontinua en } x=0$$

b) No siendo continua, no puede ser derivable en x = 0

c)

$\text{Asintota vertical} \Rightarrow x=0^-$

$\text{Asintotas horizontales}$

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(x^2-4x+3\right)=\infty \Rightarrow \text{No existe asíntota horizontal cuando } x\to\infty$$

$$y=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1}=2\Rightarrow \text{Existe asíntota horizontal, } y=2, \text{ cuando } x\to-\infty$$

d)

$$f'(x)=2x-4\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow 2x-4=0\Rightarrow 2x=4\Rightarrow x=2\Rightarrow f''(x)=2\Rightarrow f''(2)=2>0\Rightarrow \text{Mínimo relativo}$$

A3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean el plano $\pi \equiv z = x$ y los puntos A(0, -1, 0) y B(0, 1, 0) pertenecientes al plano π.

a) (1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices contiguos de un cuadrado con vértices {A,B,C,D} que se encuentra en el plano π, encuentre los posibles puntos C y D.

b) (1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices opuestos de un cuadrado que se encuentra en el plano π, determine los otros dos vértices del mismo.

a) Estará el punto C en una recta perpendicular a AB y a una distancia igual al módulo de ese vector, asimismo pertenece al plano dado

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0,1,0) - (0,-1,0) = (0,2,0) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2} = 2 \\ \overrightarrow{BC} = (a,b,c) - (0,1,0) = (a,b-1,c) \\ \text{Por pertenecer al plano} \Rightarrow a - c = 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow (0,2,0)(a,b-1,a) = 2b - 2 = 0 \Rightarrow b = 1$$

$$\overrightarrow{BC} = 2 \Rightarrow \sqrt{a^2 + 0^2 + a^2} = 2 \Rightarrow \sqrt{2a^2} = 2 \Rightarrow 2a^2 = 4 \Rightarrow a^2 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \text{Dos soluciones}$$

$$\text{Dos soluciones}\begin{cases} C_1\left(\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}\right) \\ C_2\left(-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1\begin{cases} x_{E_1} = \dfrac{\sqrt{2}+0}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y_{E_1} = \dfrac{1+(-1)}{2} = 0 \quad \Rightarrow E_1\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ z_{E_1} = \dfrac{\sqrt{2}+0}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ E_2\begin{cases} x_{E_2} = \dfrac{-\sqrt{2}+0}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y_{E_2} = \dfrac{1+(-1)}{2} = 0 \quad \Rightarrow E_2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ z_{E_2} = \dfrac{-\sqrt{2}+0}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{0+x_D}{2} \Rightarrow x_D = \sqrt{2} \\ 0 = \dfrac{1+y_D}{2} \Rightarrow y_D + 1 = 0 \quad \Rightarrow D_1\left(\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}\right) \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{0+z_D}{2} \Rightarrow z_D = \sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{0+x_D}{2} \Rightarrow x_D = -\sqrt{2} \\ 0 = \dfrac{1+y_D}{2} \Rightarrow y_D = -1 \quad \Rightarrow D_2\left(-\sqrt{2}, -1, -\sqrt{2}\right) \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{0+z_D}{2} \Rightarrow z_D = -\sqrt{2} \end{cases}$$

b) Siendo E el punto medio de AB, el vector CE es perpendicular al AB y su producto escalar es nulo; el punto C(u, v , w) pertenece al plano y la distancia CE es la mitad de AB (módulo del vector AB)

$$E\begin{cases} x_E = \dfrac{0+0}{2} = 0 \\ y_E = \dfrac{-1+1}{2} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{EC} = (u,v,w) - (0,0,0) = (u,v,w) \\ z_E = \dfrac{0+0}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0,1,0) - (0,-1,0) = (0,2,0) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2} = 2 \\ \overrightarrow{AE} = (0,0,0) - (0,-1,0) = (0,1,0) \\ \text{Por pertenecer al plano} \Rightarrow u - w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{EC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EC} = 0 \\ \left|\overrightarrow{EC}\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{2} 1 \\ u = w \end{cases}$$

$$\begin{cases} (0,2,0) \cdot (u,v,w) = 0 \Rightarrow 2v = 0 \Rightarrow v = 0 \\ u = w \\ \sqrt{u^2 + 0^2 + u^2} = 1 \Rightarrow u\sqrt{2} = 1 \Rightarrow u = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow C\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} 0 = \dfrac{x_D + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \Rightarrow x_D = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 = \dfrac{y_D + 0}{2} \Rightarrow y_D = 0 \quad ;D\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ 0 = \dfrac{z_D + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \Rightarrow z_D = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

A4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
En una comunidad autónoma tres de cada cinco alumnos de segundo de bachillerato están matriculados en la asignatura de Matemáticas II. Se eligen 6 alumnos al azar de entre todos los alumnos de segundo de bachillerato.
Se pide:
a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos estén matriculados en Matemáticas II.
b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos este matriculado en Matemáticas II.
c) (1 punto) Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 alumnos, calcular, aproximando la distribución binomial mediante una distribución normal, la probabilidad de que más de 60 de estos alumnos estén matriculados en Matemáticas II.

(a)
Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos estén matriculados en Matemáticas II.

Recordamos que si realizamos **n** veces (6) un experimento, elegir 6 alumnos de segundo de Bachillerato, en el que podemos obtener éxito, **F** (estar matriculado de Matemáticas II), con probabilidad **p** (p(F) = 3/5 = 0'6) y fracaso, $\mathbf{F^C}$ (no estar matriculado de Matemáticas II), con probabilidad **q** (**q** = 1 - **p** = 1 - 0'6 = 0'4), diremos que la variable **X**, estar matriculado en Matemáticas II, sigue una distribución binomial de parámetros **n** y **p**, y lo representaremos por **B(n; p)**.

Es decir nuestra variable **X sigue una binomial B(n; p)** = **B(6; 0'6)**.

En este caso la **probabilidad de obtener k éxitos**, que **es su función de probabilidad**, viene dada por:

$$\mathbf{p(X = k) = (6\ sobre\ k)\cdot 0'6^{k}\cdot 0'4^{(6-k)} = \binom{6}{k}\cdot 0'6^{k}\cdot 0'4^{(6-k)}.}$$

** (n sobre k) = $\binom{n}{k}$ = (n!)/(k!.(n - k)!) con n! el factorial de "n". En la calculadora " n tecla **nCr** k "

Me piden $\mathbf{p(X = 4) = \binom{6}{4}\cdot 0'6^{4}\cdot 0'4^{(2)} = 0'31104.}$

(b)
Calcular la probabilidad de que alguno de ellos este matriculado en Matemáticas II.
Me piden p(alguno de ellos este matriculado) = $\mathbf{p(X \geq 1)}$ **=**{suceso contrario}**= 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) =**
$\mathbf{= 1 - \binom{6}{0}\cdot 0'6^{0}\cdot 0'4^{(6)} = 0'995904.}$

(c)
Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 alumnos, calcular, aproximando la distribución binomial mediante una distribución normal, la probabilidad de que más de 60 de estos alumnos estén matriculados en Matemáticas II.

Ahora **la variable X** que **sigue una binomial B(n; p) = B(120; 0'6)**.

Como $n\cdot p = 120\cdot 0'6 = 72 \geq 5$ y $n\cdot q = 120\cdot 0'4 = 48 \geq 5$. **La variable X que sigue una binomial B(n;p) = = B(120; 0'6), se puede aproximar por la variable X ' que sigue una normal** $\mathbf{N(\mu, \sigma) = N(n\cdot p, \sqrt{(npq)}) = N(72, \sqrt{(72\cdot 0'4)}) = N(72, 5'36656))}$

Como X es una distribución discreta y X ' es una distribución continua tenemos que aplicarle las correcciones de Yates: $p(X \leq k) = p(X' \leq k + 0'5)$; $p(X < k) = p(X' < k - 0'5)$; $p(X > k) = p(X' < k + 0'5)$;
$p(X = x) = p(x - 0'5 \leq X' \leq x + 0,5)$; $p(a \leq X \leq b) = p(a - 0'5 \leq X' \leq b + 0'5)$ etc…

Me piden p(más de 60 alumnos matriculados) = p(X > 60) = p(X ' > 60 + 0'5) = p(X ' > 60'5) =
= {Tipificamos} **=** $p\left(Z \geq \frac{60'5 - 72}{5'36656}\right)$ **=** $\mathbf{p(Z \geq -2'14)}$ **=** {por simetría} **=** $\mathbf{p(Z \leq 2'14) = 0'9838.}$

B1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran las matrices reales $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & k\\ k & 1 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcule para qué valores del parámetro k tiene inversa la matriz AB. Calcule la matriz inversa de AB para k = 1.
b) (1 punto) Calcule BA y discuta su rango en función del valor del parámetro real k.
c) (0.5 puntos) En el caso k = 1, escriba un sistema incompatible de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes sea BA.

a) Una matriz tiene inversa cuando su determinante no es nulo

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -1 & k\\ k & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k & 2\\ k & k-1\end{pmatrix}\Rightarrow |AB|=\begin{vmatrix}k & 2\\ k & k-1\end{vmatrix}=k^2-k-2k=k^2-3k\Rightarrow \text{Si } |AB|=0\Rightarrow k(k-3)=0\Rightarrow\begin{cases}k=0\\ k=3\end{cases}$$

$$\forall k\in\mathbb{R}-\{0\,,3\}\Rightarrow |AB|\neq 0\Rightarrow \text{Existe } (AB)^{-1}\Rightarrow (AB)^{-1}=\frac{1}{|AB|}\cdot \text{adj}\left[(AB)^t\right]\Rightarrow \text{Si } k=1\Rightarrow |AB|=1\cdot(1-3)=-2\Rightarrow$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow (AB)^t=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{adj}\left[(AB)^t\right]=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow (AB)^{-1}=\frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

b)

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & k\\ k & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k+1 & 0 & k-1\\ 1-k & -2 & k+1\\ 1 & -1 & k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k+1 & 0 & k-1\\ -1-k & 0 & -k+1\\ 1 & -1 & k\end{pmatrix}\Rightarrow |BA|=1\cdot\begin{vmatrix}k+1 & k-1\\ -1-k & -k+1\end{vmatrix}=$$

$$|BA|=-k^2+k-k+1-\left(-k+1-k^2+k\right)=-k^2+1-\left(-k^2+1\right)=-k^2+1-k^2-1=0\Rightarrow \text{rang}(BA)\neq 3$$

$$\begin{pmatrix}k+1 & 0 & k-1\\ -1-k & 0 & -k+1\\ 1 & -1 & k\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}k+1 & 0 & k-1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & k\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}k+1 & k-1\\ 1 & k\end{vmatrix}=k^2+k-k+1=k^2+1\Rightarrow k^2+1=0\Rightarrow \text{Sin solución}$$

$$\forall k\in\mathbb{R}\Rightarrow \text{rang}(BA)=2$$

c)

$k=1$

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x=0\\ -2y+2z=0\\ x+y+z=0\end{cases}$$

B2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x \le 0 \\ x\cdot \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

a) (0.5 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f(x) en x = 0.
b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f(x), así como los máximos y mínimos relativos.

c) (1 punto) Calcule $\int_1^2 f(x)dx$.

a)

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x) = 0\cdot\ln(0) = 0\cdot(-\infty) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{0}} = \frac{-\infty}{\infty} = \xrightarrow{\text{Utilizando L'Hopital}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{-x} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

$$\begin{cases} f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0\cdot\ln(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \Rightarrow \text{Es continua en } x = 0$$

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ \ln(x)+1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \ln(0)+1 = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) \ne \lim_{x\to 0^-} f(x) \Rightarrow \text{No es derivable en } x = 0$$

b)

$$\text{Creciente} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \,/\, x < 0 \Rightarrow \text{Creciente} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \,/\, x < 0 \\ \ln(x)+1 > 0 \Rightarrow \ln(x) > -1 \Rightarrow x > e^{-1} \Rightarrow \begin{cases} \text{Creciente} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \,/\, x > \frac{1}{e} \\ \text{Decreciente} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \,/\, 0 < x < \frac{1}{e} \end{cases} \end{cases}$$

c)

$$\int x\ln(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x) - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x) - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2 = \frac{x^2}{2}\cdot\left[\ln(x)-\frac{1}{2}\right] = \frac{x^2}{4}\cdot\left[2\ln(x)-1\right]+K$$

$$\begin{cases} \ln(x) = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du \\ x\,dx = dv \Rightarrow v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\int_1^2 x\ln(x)\,dx = \frac{1}{4}\left\{x^2\cdot\left[2\ln(x)-1\right]\right\}_1^2 = \frac{1}{4}\left\{2^2\cdot\left[2\ln(2)-1\right]-1^2\cdot\left[2\ln(1)-1\right]\right\} = \frac{1}{4}\left\{4\cdot\left[2\ln(2)-1\right]-\left[2\cdot 0-1\right]\right\}$$

$$\int_1^2 x\ln(x)\,dx = \frac{1}{4}\left\{8\ln(2)-4+1\right\} = \frac{8\ln(2)-3}{4} = \frac{\ln(2)^8-3}{4}$$

B3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ $s \equiv \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 5 + 2t \\ z = \quad t \end{cases}$, $t \in R$.

a) (1.5 puntos) Estudie la posición relativa de las rectas dadas y calcule la distancia entre ellas.
b) (0.5 puntos) Determine una ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s.
c) (0.5 puntos) Sean P y Q los puntos de las rectas r y s, respectivamente, que están contenidos en el plano de ecuación z = 0. Calcular una ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

a)
Puestas las rectas en ecuaciones paramétricas, e igualando los valores de los puntos generales, tendremos un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas. Si la matriz de los coeficientes ampliada es nula el sistema es Compatible, si los vectores directores no son proporcionales las rectas se cortan en un punto y si lo son tomaremos un punto de una de ellas y lo sustituiremos en la otra si verifica la ecuación, son coincidentes y de no hacerlo son paralelas
Si la matriz del determinante de los coeficientes ampliados no es nulo el sistema es incompatible, las rectas se cruzarán.

$$\begin{cases} y = -1 + 2z \Rightarrow x - 1 + 2z + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 - 2z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 5 + 2t \\ z = \quad t \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 - 2\lambda = 2 - 2t \\ -1 + 2\lambda = 5 + 2t \\ \lambda = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda - 2t = -3 \\ 2\lambda - 2t = 6 \\ \lambda - t = 0 \end{cases} \Rightarrow |A/B| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A/B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Se cortan, son paralelas o coincidentes}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (-2, 2, 1) \\ \overrightarrow{v_s} = (-2, 2, 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_s} \Rightarrow \text{son paralelas o coincidentes} \Rightarrow \text{Tomamos } R(-1, -1, 0) \text{ de } r \Rightarrow \begin{cases} -1 = 2 - 2t \\ -1 = 5 + 2t \Rightarrow t = -3 \\ 0 = \quad t \Rightarrow t = 0 \end{cases}$$

Son paralelas r y s

b)

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow A(-1, -1, 0),\ \vec{v} = (-2, 2, 1); \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 5 + 2t \\ z = \quad t \end{cases} \Rightarrow B(2, 5, 0),\ \overrightarrow{AB} = (3, 6, 0);$$

$$\pi \equiv \det(\overrightarrow{AX}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = 0 = \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = (x+1)\cdot(-6) - (y+1)\cdot(-3) + z(-18) = 0 = 2\cdot(x+1) - (y+1) + 6z = 0$$

$$\pi \equiv 2x - y + 6z + 1 = 0$$

c)

$$P \in r \equiv \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow P(-1,-1,0);\ Q \in s \equiv \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 5 + 2t \\ z = \quad t \end{cases} \Rightarrow Q(2,5,0) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (3,6,0)$$

$$\text{Recta PQ} \Rightarrow t \equiv \begin{Bmatrix} P \\ \overrightarrow{PQ} \end{Bmatrix} \equiv \begin{cases} x = -1 + 3m \\ y = -1 + 6m \\ z = 0 \end{cases}$$

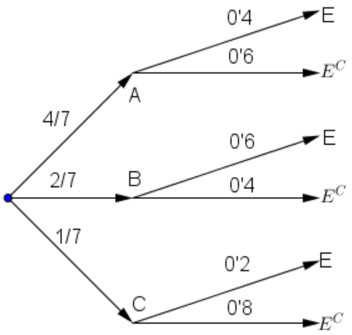
B4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Una empresa comercializa tres tipos de productos A, B y C. Cuatro de cada siete productos son de tipo A, dos de cada siete productos son de tipo B y el resto lo son de tipo C. A la exportación se destina un 40% de los productos tipo A, un 60% de los productos tipo B y un 20% de los productos tipo C. Elegido un producto al azar, se pide:
a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.
b) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto es destinado a la exportación.

(a)
Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.

Llamemos A, B, C, E y E^C, a los sucesos siguientes, “producto A”, “producto B”, “producto C”, "destinado a exportación" y "no destinado a exportación", respectivamente.

Datos del problema: p(A) = 4/7; p(B) = 2/7; p(E/A) = 40% = 0’4; p(E/B) = 60% = 0’6, p(E/C) = 20% = 0’2, …

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Me piden **p(producto destinado a la exportación)** = **p(E).**

Por el teorema de la Probabilidad Total:

Tenemos **p(E)** = p(A)·p(E/A) + p(B)·p(E/B) + p(C)·p(E/C) =
= (4/7)·(0’4) + (2/7)·(0’6) + (1/7)·(0’2) **= 3/7** ≅ **0’42857**.
(c)
Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto es destinado a la exportación

Me piden p**(sea del tipo C, sabiendo que el producto es destinado a la exportación) = p(C/E)**.

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(C/E)} = \frac{p(C\cap E)}{p(E)} = \frac{p(C)\cdot p(E/C)}{p(E)} = \frac{(1/7)\cdot(0'2)}{3/7} \mathbf{= 1/15 \cong 0'066667}.$$