A1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real m: $\begin{cases} x - 2my + z = 1 \\ mx + 2y - z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$.

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de m.
b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para el valor m = 1/2.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2m & 1 \\ m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2m & 1 \\ m+1 & 2-2m & 0 \\ 0 & 2m-1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} m+1 & 2-2m \\ 0 & 2m-1 \end{vmatrix} = (2m-1)(m+1) \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow (2m-1)(m+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \forall m \in \mathbb{R} - \left\{-1, \frac{1}{2}\right\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

$Si\ m = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Número de incógnitas} \Rightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

$Si\ m = \frac{1}{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Número de incógnitas} \Rightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

b)

$Si\ m = \frac{1}{2} \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 5y - 3z = -3 \Rightarrow -3z = -3 - 5y \Rightarrow z = 1 + \frac{5}{3}y \Rightarrow x + y + 1 + \frac{5}{3}y = 1 \Rightarrow x + \frac{5}{3}y = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}y \Rightarrow$$

$$Solución \Rightarrow (x, y, z) = \left(-\frac{5}{3}\lambda, \lambda, 1 + \frac{5}{3}\lambda\right) \equiv (-5\lambda, 3\lambda, 1 + 5\lambda)$$

A2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^3 \cdot e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

a) (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de f(x) en x = 0.
b) (0.5 puntos) Estudie si f(x) presenta algún tipo de simetría par o impar.
c) (1 punto) Calcule la siguiente integral: $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6} dx$.

a)

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^3 \cdot e^{-1/0^2} = 0\cdot e^{-\infty} = 0\cdot \frac{1}{e^{\infty}} = 0\cdot \frac{1}{\infty} = 0\cdot 0 = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ *Es continua en* $x = 0$

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2 \cdot e^{-1/x^2} - x^3 \cdot e^{-1/x^2} \cdot \left(-\frac{2x}{x^4}\right) = 3x^2 \cdot e^{-1/x^2} + x^3 \cdot e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3} = e^{-1/x^2}\left(3x^2+2\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = e^{-1/0^2}\left(3\cdot 0^2 + 2\right) = 2\cdot e^{-\infty} = \frac{2}{e^{\infty}} = \frac{2}{\infty} = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ *Es derivable en* $x = 0$

b)

$$f(-x) = \begin{cases} (-x)^3 \cdot e^{-1/(-x)^2} = -x^3 \cdot e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow \textit{Simétrica respecto al origen de coordenadas}$$

c)

$$\int \frac{x^3 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^6} dx = \int \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx = \int e^t \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\cdot e^t = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{2} + K$$

$$-\frac{1}{x^2} = t \Rightarrow -\frac{-2x}{x^4} dx = dt \Rightarrow \frac{2}{x^3} dx = dt \Rightarrow \frac{dx}{x^3} = \frac{dt}{2}$$

$$\int_1^2 \frac{x^3 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^6} dx = \frac{1}{2}\cdot \left[e^{-\frac{1}{x^2}}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{-\frac{1}{2^2}} - e^{-\frac{1}{1^2}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{-\frac{1}{4}} - e^{-1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}} - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{e^3}}{e} - \frac{1}{e}\right) = \frac{\sqrt[4]{e^3} - 1}{2e}$$

A3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Con un dispositivo láser situado en el punto P(1, 1, 1) se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{cases}$.

a) (0.5 puntos) Calcule un vector director de r y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano z = 0.
b) (1.25 puntos) Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.
c) (0.75 puntos) Determine el ángulo entre el plano de ecuación x + y = 2 y la recta r.

a) Hallaremos el punto de intersección Q de la recta con el plano

$$y = -10 + 2x \Rightarrow z = 90 + x \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -10 + 2\lambda \\ z = 90 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (1,\ 2, 1) \Rightarrow 90 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -90 \Rightarrow Q \begin{cases} x = -90 \\ y = -10 + 2\cdot(-90) \\ z = 90 + (-90) \end{cases} \Rightarrow$$

$Q(-90\ ,\ -190\ \ ,0)$

b) Hallaremos la mínima distancia del punto P a la recta r, para ello calcularemos un plano π perpendicular a la recta, cuyo vector director es el de la recta que será perpendicular al vector GP, siendo G el punto generador del plano, y cuyo producto escalar es nulo y la ecuación pedida; el punto R intersección del plano hallado y la recta es el punto pedido

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_r} = (1,\ 2, 1) \\ \overrightarrow{GP} = (x\ ,\ y\ , z) - (1,\ 1, 1) = (x-1,\ y-1, z-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{GP} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{GP} = 0 \Rightarrow (1,\ 2, 1)\cdot(x-1,\ y-1, z-1) = 0 \Rightarrow$$

$$x - 1 + 2y - 2 + z - 1 = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + 2y + z - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -10 + 2\lambda \\ z = 90 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda + 2(-10 + 2\lambda) + 90 + \lambda - 4 = 0 \Rightarrow 6\lambda + 66 = 0 \Rightarrow 6\lambda = -66 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow R \begin{cases} x = -1 \\ y = -10 + 2\cdot(-1) \\ z = 90 + (-1) \end{cases} \Rightarrow$$

$R(-1,\ -12, 89)$

c)

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1,\ 2, 1) \\ \overrightarrow{v_\alpha} = (1,\ 1, 0) \end{cases} \Rightarrow sen\ \beta = sen\left(\overrightarrow{v_r}\ , \overrightarrow{v_\alpha}\right) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_\alpha}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_\alpha}\right|} = \frac{\left|(1,\ 2, 1)\cdot(1,\ 1, 0)\right|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|1+2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\beta = arc\ sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 60^{o} = \frac{\pi}{3}\ rad = 66^{g}66^{m}66^{s}$$

A4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Según el Instituto Nacional de Estadística, durante el último trimestre de 2020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de Consejos de Administración de las empresas que componen el Ibex-35 fue del 27’7 %.
Se reunieron 10 de estos consejeros.
a) (0.75 puntos) Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.
b) (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.
c) (1 punto) Determine, aproximando mediante una distribución normal, la probabilidad de que en un congreso de doscientos consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35% de representación femenina.

Según el Instituto Nacional de Estadística, durante el último trimestre de 2020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de Consejos de Administración de las empresas que componen el Ibex-35 fue del 27’7 %.
Se reunieron 10 de estos consejeros.
(a)
Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.

Recordamos que si realizamos **n** veces (10) un experimento en el que podemos obtener éxito, **F** (mujeres que pertenecen al Consejo de Administración, con probabilidad **p** (p(F) = 27’7%% = 0’277) y fracaso, **F^C^** (no pertenecer), con probabilidad **q** (**q** = 1 - **p** = 1 - 0’277 = 0’723), diremos que la variable **X**, número de mujeres en el Consejo de Administración, sigue una distribución binomial de parámetros **n** y **p**, y lo representaremos por **B(n; p)** = **B(10; 0'277), es decir X sigue una binomial B(10; 0'277)**.

En este caso la **probabilidad de obtener k éxitos**, que **es su función de probabilidad**, viene dada por:

$$\mathbf{p(X = k) = (10 \text{ sobre } k)\cdot 0'277^{k}\cdot 0'723^{(10-k)} = \binom{10}{k}\cdot 0'277^{k}\cdot 0'723^{(10-k)}.}$$

****** (n sobre k) = $\binom{n}{k}$ = (n!)/(k!.(n - k)!) con n! el factorial de "n". En la calculadora " n tecla **nCr** k "

Me piden p(X = 5) = $\mathbf{\binom{10}{5}\cdot 0'277^{5}\cdot 0'723^{(5)} \cong 0'0811878.}$

(b)
Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.

Que haya al menos un hombre es lo mismo que "Haya 9 mujeres o menos".

Me piden p(X ≤ 9) = {suceso contrario} = 1 – p(X > 9) = 1 – p(X = 10) =

= 1 - $\mathbf{\binom{10}{10}\cdot 0'277^{10}\cdot 0'723^{(0)} \cong 0'999997.}$

(c)
Determine, aproximando mediante una distribución normal, la probabilidad de que en un congreso de doscientos consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35% de representación femenina.

El 35% de 200 consejeros es 200·035 = 70, es decir **me piden p(X ≥ 70)**, con la variable **X siguiendo una binomial B(n; p) = B(200; 0'277)**.

Como n·p = 200·0'277 = 55'4 ≥ 5 y n·q = 200·0'723 = 144'6 ≥ 5, **la variable X que sigue una binomial B(n;p) = B(200; 0'277), se puede aproximar por la variable X ' que sigue una normal N(μ, σ) =**
= N(n·p,√(npq)) = N(55'4, √(55'4·0'723)) = N(55'4, 6'3288).

Como X es una distribución discreta y X ' es una distribución continua tenemos que aplicarle las correcciones de Yates: p(X ≤ k) = p(X' ≤ x+0,5); p(X < x) = p(X' < x-0.5); p(X=x) = p(x-0,5≤ X' ≤ x+0,5); p(a ≤ X ≤ b) = p(a-0'5 ≤ X' ≤ b+0'5) etc…

En nuestro caso **p(X ≥ 70) = p(X' ≥ 69'5) =** {Tipificamos} = $p\left(Z \geq \dfrac{69'5 - 55'4}{6'3288}\right)$ **= p(Z ≥ 2'23) =** {contrario} =

= 1 - p(Z ≤ 2'23) **= 1 - 0'9871 = 0'0129.**

B1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia, se van a repartir un premio de 9450 euros de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia. Además, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio Pablo recibe 420 euros más que Alicia, calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.

P es la edad de Pablo, A la de Alejandro y C la de Alicia

$$\frac{9450}{45} = 210 \text{ € / } año$$

$$\begin{cases} P + A = 2C + 3 \\ P + A + C = 45 \\ 210P = 210C + 420 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P + A - 2C = 3 \\ P + A + C = 45 \\ 210P - 210C = 420 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P + A - 2C = 3 \\ P + A + C = 45 \\ P - C = 2 \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow P = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 45 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 47 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 47 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{(-1)(-1-47)}{3} = 16$$

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 45 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 42 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1 \cdot \begin{vmatrix} 42 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{42+3}{3} = 15$$

$$C = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 45 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 42 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{(-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 42 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-(-42)}{3} = 14 \Rightarrow \textit{Solución edades} \Rightarrow (P, A, C) = (16, 15, 14) \textit{ años}$$

$$\textit{Dinero que reciben} \Rightarrow (P, A, C) = (210 \cdot 16, 210 \cdot 15, 210 \cdot 14) = (3360, 3150, 2940) \text{ €}$$

B2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

a) (0.5 puntos) Compruebe si f(x) verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo [-1, 1].

b) (1 punto) Calcule y clasifique los extremos relativos de f(x) en R.

c) (1 punto) Determine el área comprendida entre la gráfica de la función f(x) y el eje OX en el intervalo [-1, 1].

a)

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow \text{Sin } solución \Rightarrow Dom\,(f) = \forall x \in \mathbb{R}$$

<u>Teorema de Bolzano</u>

Si f(x) es continua en el intervalo [a , b], y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo [sign f(a) $\neq$ sign f(b)], entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que f(c) = 0

f (x) es continua en el intervalo [-1 , 1], y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo

$$\begin{cases} f(-1) = \dfrac{-1}{(-1)^2 + 1} = -\dfrac{1}{2} \\ f(-1) = \dfrac{1}{1^2 + 1} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$ [sign f(-1) $\neq$ sign f(1)], entonces existe, al menos, un punto c $\in$ (-1, 1) tal que f(c) = 0

$$\Rightarrow \frac{x}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow c = 0 \in (-1, 1)$$

Continuación Problema B2
a) Continuación

$-\infty$	-1	1	∞
$\left(x^2+1\right)^2>0$	(+)	(+)	(+)
x > -1	(-)	(+)	(+)
x < 1	(+)	(+)	(-)
Solución	(-)	(+)	(-)

Crecimiento $\forall x\in\mathbb{R}\,/\,-1<x<1$ Decrecimiento $\forall x\in\mathbb{R}\,/\,(x<-1)\cup(x>1)$

Valores mínimos

$$y=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=\frac{-\infty}{\infty}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2x}=\frac{1}{-\infty}=0\Rightarrow \text{Asíntota horizontal cuando } x\to-\infty$$

$$y=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}=\xrightarrow{Utilizando\ L'Hopital}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=\frac{1}{\infty}=0\Rightarrow \text{Asíntota horizontal cuando } x\to\infty$$

b)

Mínimo absoluto en $x=-1\Rightarrow f(-1)=\dfrac{-1}{(-1)^2+1}=-\dfrac{1}{2}$

Máximo absoluto en $x=1\Rightarrow f(1)=\dfrac{1}{1^2+1}=\dfrac{1}{2}$

$c)$

$$\text{Puntos de corte con OX}\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow\frac{x}{x^2+1}=0\Rightarrow x=0$$

$$-\frac{1}{2}\in(-1,0)\Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-\frac{1}{2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+1}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}}=-\frac{4}{10}=-\frac{2}{5}\Rightarrow f(x)<0 \text{ entre } (-1,0)$$

$$\frac{1}{2}\in(0,1)\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+1}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}\Rightarrow f(x)>0 \text{ entre } (0,1)$$

$$f(-x)=\frac{(-x)}{(-x)^2+1}=-\frac{x}{x^2+1}=-f(x)\Rightarrow \text{Simetrica respecto al centro de coordenadas}$$

$$A=2\cdot\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=2\cdot\int_1^2\frac{1}{t}\frac{dt}{2}=\int_1^2\frac{dt}{t}=\left[\ln x\right]_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2-0=\ln 2\ u^2$$

$$x^2+1=t\Rightarrow 2x\,dx=dt\Rightarrow x\,dx=\frac{dt}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=1\Rightarrow t=2\\ x=0\Rightarrow t=1\end{cases}$$

B3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$, la recta $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 \end{cases}$, $\lambda \in R$ y el punto P(0, 1, 0).

a) (0.5 puntos) Verifique que la recta r_1 está contenida en el plano π y que el punto P pertenece al mismo plano.
b) (0.75 puntos) Halle una ecuación de la recta contenida en el plano π que pase por P y sea perpendicular a r_1.
c) (1.25 puntos) Calcule una ecuación de la recta, r_2, que pase por P y sea paralela a r_1. Halle el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las rectas r_1 y r_2.

a) Los vectores directores de la recta y el plano son perpendiculares y su producto escalar es nulo; el plano contiene el punto indicado R en la ecuación de la recta, cumplidas estas dos condiciones le recta está contenida en el plano

a)

$$\begin{cases} \begin{cases} \overrightarrow{v_{r_1}} = (1,-1,0) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (1,1,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{r_1}} \cdot \overrightarrow{v_\pi} = (1,-1,0)\cdot(1,1,1) = 1-1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v_{r_1}} \perp \overrightarrow{v_\pi} \\ R(1,1,-1) \Rightarrow 1+1-1 = 1 \Rightarrow R \in \pi \end{cases} \Rightarrow \textit{La recta } r_1 \textit{ esta contenida en el plano}$$

$$P(0,1,0) \Rightarrow 0+1-0 = 1 \Rightarrow P \in \pi$$

b) La recta buscada r_2 tendrá como vector director el del plano

$$\overrightarrow{v_{r_3}} = \overrightarrow{v_\pi} = (1,1,1) \Rightarrow r_3 \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 1+\mu \\ z = \mu \end{cases}$$

c) La recta r_2 tiene como vector director el de la recta r_1 ; hallaremos un plano β que pase por el punto P y que sea perpendicular a la rectas, siendo su vector director el de ellas y un vector GP, siendo G el punto genérico del plano que son perpendiculares y su producto escalar nulo y la ecuación buscada, hallado el punto de intersección S de él con la recta r_2, el lado es el módulo de PS que elevado al cuadrado nos da el área

a)

$$\overrightarrow{v_{r_2}} = \overrightarrow{v_{r_1}} = (1,-1,0) \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x = \delta \\ y = 1-\delta \Rightarrow R(1,1,-1) \Rightarrow \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} \overrightarrow{v_\beta} = \overrightarrow{v_{r_2}} = \overrightarrow{v_{r_1}} = (1,-1,0) \\ \overrightarrow{GP} = (x,y,z)-(0,1,0) = (x,y-1,z) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_\beta} \perp \overrightarrow{GR} \Rightarrow \overrightarrow{v_\beta} \cdot \overrightarrow{GR} = 0 \Rightarrow (1,-1,0)\cdot(x,y-1,z) = 0 \Rightarrow \beta \equiv x-y+1 = 0 \Rightarrow\Rightarrow$$

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow 1 + \lambda - 1 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow 2\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow S \begin{cases} x = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \\ y = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow S\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},-1\right)$$

$$\overrightarrow{RS} = \left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},-1\right) - (1,1,-1) = \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right) \Rightarrow L = lado = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \textit{Área} = L^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}u^2$$

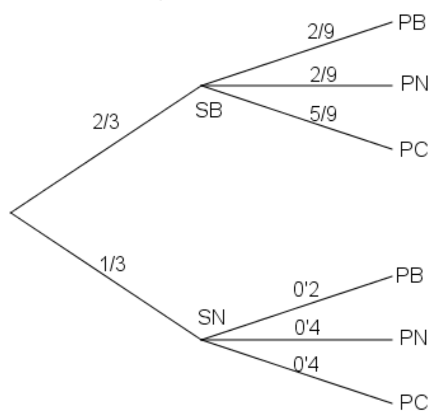
B4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco, se toma, al azar, un pañuelo de un cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si el sombrero es negro, se elige, al azar, un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros blancos y negros. Se pide:
a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.
b) (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.
c) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.

(a)
Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero.

Llamemos SB, SN, PB, BN y BC a los sucesos siguientes, "sombrero de color blanco", "sombrero de color negro", "pañuelo de color blanco", "pañuelo de color negro" y "pañuelo con cuadros blancos y negros", respectivamente.

Datos del problema: p(SB) = 6/9 = 2/3; p(SN) = 1/3; p(PB/SB) = 2/9; p(PN/SB) = 2/9, p(PC/SB) = 5/9, p(PB/SN) = 2/10 = 0'2; p(PN/SN) = 4/10 = 0'4, p(PC/SN) = 4/10 = 0'4...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Me piden **p(el pañuelo aparezca algún color que no sea el del sombrero) = p(SB$\cap$PN) + p(SN$\cap$PB) =**
= p(SB)·p(PN/SB) + p(SN)·p(PB/SN) = (2/3)(2/9) + (1/3)(0'2) **= 29/135 $\cong$ 0'2148148….**
(b)
Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.

Me piden **p(al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro) =**

= p(SB$\cap$PN) + p(SB$\cap$PC)+ p(SN)·1 = (2/3)(2/9) + (2/3)(5/9) + (1/3)(1) **= 23/275 $\cong$ 0'851851…**
(c)
Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.

Calculamos primero la probabilidad de que el pañuelo sea a cuadros = p(PC)

Por el Teorema de la probabilidad Total

p(PC) = p(SB)·p(PC/SB) + p(SN)·p(PC/SN) = (2/3)(5/9) + (1/3)(0'4) **= 68/135 $\cong$ 0'5037037…**

Me piden **p(el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros) = p(SN/PC)**.

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(SN/PC) =} \frac{p(SN \cap PC)}{p(PC)} = \frac{p(SN)\cdot p(PC/SN)}{p(PC)} = \frac{(1/3)\cdot(0'4)}{(68/135)} \mathbf{= 9/34 \cong 2670588.}$$