

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 3

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que permetin emmagatzemar dades o que puguin transmetre o rebre informació.

1. Considereu la funció polinòmica $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$.
 - a) Calculeu els valors dels paràmetres a , b i c , sabent que la funció té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = 1$ i que la recta tangent a la gràfica de la funció en el punt d'abscissa $x = 0$ és la recta $y = x + 3$.
[1 punt]
 - b) Per als valors $a = 2$, $b = 1$ i $c = 3$, calculeu les abscisses dels extrems relatius de la funció i classifiqueu-los.
[1 punt]
2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real a :
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + ay = 2a \end{cases}$$
 - a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre a .
[1 punt]
 - b) Resoleu el sistema per al cas $a = 1$.
[1 punt]
3. Considereu el pla que té com a vectors directors $u = (-1, 3, 2)$ i $v = (2, 1, 0)$ i que passa pel punt $A = (1, 0, 3)$.
 - a) Calculeu l'equació de la recta que és perpendicular al pla i passa pel punt A .
[1 punt]
 - b) Calculeu la distància del punt $P = (1, 5, 0)$ al pla.
[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ amb l'expressió } \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

4. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, en què α és un paràmetre real.

a) Hi ha algun valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que A no tingui inversa per a aquest valor?

[1 punt]

b) Calculeu la matriu inversa de A^2 per a $\alpha = 0$.

[1 punt]

5. Considereu els punts de l'espai tridimensional $A = (1, 1, 0)$, $B = (3, 5, 0)$ i $C = (1, 0, 0)$ i la

recta $r: x = y - 1 = \frac{z}{2}$.

a) Trobeu el punt d'intersecció de la recta r amb el pla que passa pels punts A , B i C .

[1 punt]

b) Trobeu els punts P de la recta r per als quals el tetraedre de vèrtexs P , A , B i C té un volum de $2u^3$.

[1 punt]

NOTA: El volum d'un tetraedre de vèrtexs P , Q , R i S es pot calcular amb l'expressió

$$\frac{1}{6} \left| \det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}) \right|.$$

6. Siguin les funcions $f(x) = x^2 - 1$ i $g(x) = 3 - x^2$.

a) Feu un esbós de les gràfiques de les paràboles $y = f(x)$ i $y = g(x)$ en un mateix sistema d'eixos cartesianes i trobeu els punts de tall amb l'eix de les abscisses, els vèrtexs i els punts de tall entre les dues gràfiques.

[1 punt]

b) Calculeu l'àrea de la regió del semiplà $y \geq 0$ compresa entre les gràfiques de $f(x)$ i $g(x)$.

[1 punt]



Institut
d'Estudis
Catalans