Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2020

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 1

Qualificació			TR
Qüestions	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
Suma de notes parcials			
Qualificació final			

Etiqueta de l'alumne/a

Ubicació del tribunal ....

Número del tribunal ....

Etiqueta de qualificació

Etiqueta del corrector/a

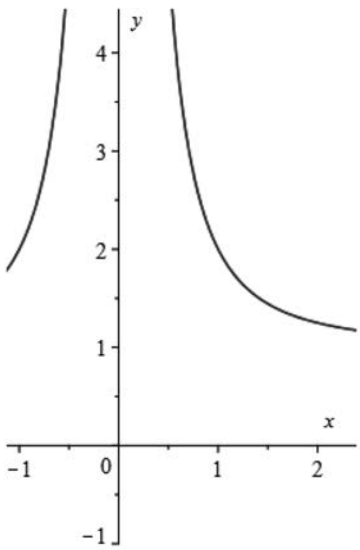
Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. Tracem la recta tangent a la funció $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+1$ per un punt $P=(a, f(a))$ del primer quadrant. Aquesta recta juntament amb els eixos de coordenades formen un triangle.



***a*)** Comproveu que l'àrea d'aquest triangle, en funció de a, ve donada per la funció

$$g(a)=\frac{(a^2+3)^2}{4a}.$$

[1,25 punts]

b) En quin punt P l'àrea del triangle és mínima? Calculeu aquest valor mínim.
[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 1	*a*	
	b	
	Total	

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k:

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ kx + 2y + 8z = 28 \\ 5x + y - kz = 23 + k \end{cases}$$

***a*)** Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k.
[1,25 punts]

***b*)** Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $k = 0$.
[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 2	*a*	
	b	
	Total	

3. ***a*)** Calculeu l'equació general del pla π que passa pel punt (8, 8, 8) i té com a vectors directors $\boldsymbol{u} = (1, 2, -3)$ i $\boldsymbol{v} = (-1, 0, 3)$.

[1,25 punts]

***b*)** Determineu el valor del paràmetre a perquè el punt $(1, -5, a)$ pertanyi al pla π i calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa per aquest punt i és perpendicular al pla π.

[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 3	*a*	
	b	
	Total	

4. Considereu la funció $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{x}$, en què a i b són dos paràmetres reals. Calculeu els valors de a i b de manera que la funció $f(x)$ tingui una asímptota obliqua de pendent 1 i un mínim en el punt de la gràfica d'abscissa $x=2$.

[2,5 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 4	Total	

5. Sigui la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Trobeu la matriu $\boldsymbol{X}$ que satisfà l'equació $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{I} - 3\boldsymbol{X}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat d'ordre 2.

[1,25 punts]

b) Comproveu que la matriu $\boldsymbol{X}$ és invertible i calculeu-ne la matriu inversa.
[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 5	*a*	
	b	
	Total	

6. Considereu la funció $f(x) = x^3$.

a) Calculeu en quin punt del tercer quadrant la recta tangent a $y = f(x)$ és paral·lela a la recta $3x - y = 4$. Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquest punt i feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció i les dues rectes.

[1,25 punts]

***b*)** Calculeu l'àrea de la regió delimitada per $y = f(x)$ i la recta $y = 3x + 2$.
[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 6	*a*	
	b	
	Total	

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

Etiqueta de l’alumne/a

Institut d’Estudis Catalans

L’Institut d’Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l’edició d’aquesta prova d’accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2020

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 3

Qualificació			TR
Qüestions	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
Suma de notes parcials			
Qualificació final			

Etiqueta de l'alumne/a

Ubicació del tribunal ....

Número del tribunal ....

Etiqueta de qualificació

Etiqueta del corrector/a

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

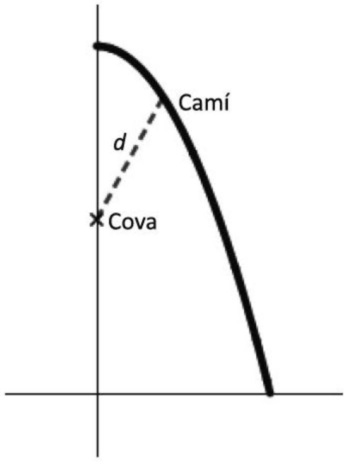
1. Sigui $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

***a*)** Determineu el rang de la matriu $\boldsymbol{A}$ en funció del paràmetre a.
[1,25 punts]

***b*)** Comproveu que $\det(\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}) = 0$.
[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 1	*a*	
	b	
	Total	

2. S'han trobat unes pintures rupestres en una cova situada en una zona molt pedregosa. Hi ha un camí que voreja parcialment la cova format per l'arc de corba $y = 4 - x^2$ d'extrems (0, 4) i (2, 0). La cova està situada en el punt de coordenades (0, 2), tal com es mostra en la figura, i es vol habilitar un accés rectilini *d* des del camí a la cova que sigui el més curt possible.



a) Identifiqueu a la gràfica de la figura les coordenades de la cova i del punt del camí des d'on es vol habilitar l'accés. Comproveu que la funció $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$ calcula la distància des de cada punt del camí a la cova.

[1,25 punts]

***b*)** Calculeu les coordenades del punt del camí que queda més a prop de la cova i digueu quina serà la longitud de l'accés *d*.
[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 2	*a*	
	b	
	Total	

3. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} ax + y = a \\ x + ay + z = 5 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

***a*)** Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre a.
[1,25 punts]

***b*)** Resoleu el sistema per al cas $a = 2$.
[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 3	*a*	
	b	
	Total	

4. Sigui la funció $f(x)=\frac{1}{x}\cdot\ln(x)$, en què ln indica el logaritme neperià, definida per a $x>0$.

a) Calculeu les coordenades del punt de la corba $y=f(x)$ en què la recta tangent a la corba en aquest punt és horitzontal. Estudieu si aquest punt és un extrem relatiu i classifiqueu-lo.

[1,25 punts]

b) Calculeu l'àrea del recinte delimitat per la corba $y = f(x)$, les rectes verticals $x = 1$ i $x = \mathrm{e}$ i l'eix de les abscisses.

[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 4	*a*	
	b	
	Total	

5. Considereu la recta r d'equació $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z}{1}$ i la recta s que passa pel punt $P=(2,-5,1)$ i que té per vector director $(-1,0,-1)$.

a) Estudieu la posició relativa de les rectes r i s.

[1,25 punts]

***b*)** Calculeu l'equació general del pla que és paral·lel a la recta *r* i conté la recta *s*.
[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 5	*a*	
	b	
	Total	

6. Una empresa de ceràmica vol posar a la venda una rajola quadrada de 20 cm de costat pintada a dos colors, de manera que la superfície de cada color sigui la mateixa i que si es posen les rajoles l'una al costat de l'altra es vegi un dibuix continu (figura 1).

Figura 1

Figura 2

Per a fer-ho, l'empresa utilitza en cada rajola la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ enquadrada entre els punts de coordenades (0, 0), (0, 2), (2, 0) i (2, 2), tal com es mostra en la figura 2, i fa servir com a unitat de mesura el decímetre.

a) Justifiqueu que, efectivament, aquesta funció permet ajuntar les rajoles de manera contínua i derivable.

[1,25 punts]

b) Justifiqueu que aquesta funció divideix el quadrat esmentat en dues parts que tenen la mateixa superfície.
[1,25 punts]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 6	*a*	
	b	
	Total	

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

Etiqueta de l'alumne/a

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés