PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

COMUNIDAD DE CATALUÑA

JUNIO – 2014

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las siguientes seis cuestiones. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Puede utilizar calculadora, pero no pueden utilizarse calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

CUESTIONES

1ª) Considere la matriz $M=\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{bmatrix}$, $con\ a\in R$.

a) Calcule el rango de la matriz M en función de los valores del parámetro α.

b) Discuta y resuelva el sistema de ecuaciones lineales $M\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, según los valores del parámetro α.

----

a)

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{vmatrix}=(a+1)(a-1)^2+a(a+1)^2+a^2(a-1)-a^2(a+1)-(a-1)(a+1)^2-$$

$$-a(a-1)^2=(a+1)\left[(a-1)^2-a^2\right]+a\left[(a+1)^2-(a-1)^2\right]+(a-1)\left[a^2-(a+1)^2\right]=$$

$$=(a+1)\left(a^2-2a+1-a^2\right)+a\left(a^2+2a+1-a^2+2a-1\right)+(a-1)\left(a^2-a^2-2a-1\right)=$$

$$=(a+1)(-2a+1)+a(4a)+(a-1)(-2a-1)=-2a^2+a-2a+1+4a^2-2a^2-a+2a+1=2\neq 0.$$

El rango de M es 3 para cualquier valor real de α.

b)

El sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} x+ay+a^2z=1 \\ x+(a+1)y+(a+1)^2z=1 \\ x+(a-1)y+(a-1)^2z=1 \end{array}\right\}.$

Restando la primera ecuación a las otras dos resulta: $\left.\begin{array}{r} x+ay+a^2z=1 \\ y+(2a+1)z=0 \\ -y+(-2a+1)z=0 \end{array}\right\}.$

Sumando la segunda ecuación a la tercera resulta: $\left.\begin{array}{r} x+ay+a^2z=1 \\ y+(2a+1)z=0 \\ 2z=0 \end{array}\right\}.$

<u>Solución: x = 1, y = 0, z = 0</u>.

****

2ª) Considere el punto A(1, 2, 3):

a) Calcule el punto simétrico con respecto a la recta $r \equiv (x,\ y,\ z) = (3+\lambda,\ 1,\ 3-\lambda)$ del punto A.

b) Calcule el punto simétrico de A respecto del plano $\pi \equiv x+y+z=3$.

----

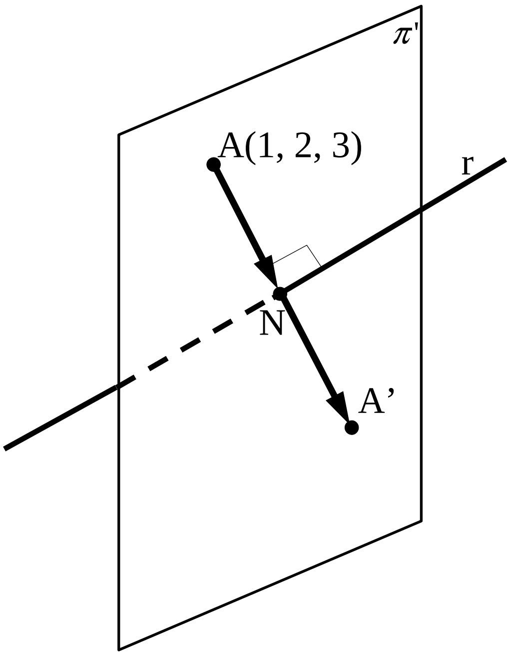
a)

Un vector director de r es $\underline{\overrightarrow{v_r} = (1,\ 0,\ -1)}$.

El plano π', perpendicular a r por A(1, 2, 3), es el que tiene como vector normal a $\overrightarrow{v_r}$ y contiene al punto A:

$$\left.\begin{array}{l} \pi' \equiv x-z+D=0 \\ A(1,\ 2,\ 3) \end{array}\right\} \Rightarrow 1-3+D=0\ ;;\ \underline{D=2} \ \Rightarrow\ \underline{\pi' \equiv x-z+2=0}.$$

El punto N de intersección de la recta r con el plano π' es el siguiente:



$$\left.\begin{array}{l} \pi' \equiv x-z+2=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=1 \\ z=3-\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow\ (3+\lambda)-(3-\lambda)+2=0\ ;;$$

$$3+\lambda-3+\lambda+2=0\ ;;\ 2\lambda+2=0\ ;;\ \lambda+1=0\ ;;\underline{\lambda=-1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left.\begin{cases} x=3-1=2 \\ y=1 \\ z=3+1=4 \end{cases}\right\} \Rightarrow\ \underline{N(2,\ 1,\ 4)}.$$

Con objeto de clarificar la situación, la expresamos en la figura adjunta de forma aproximada.

El punto N(2, 1, 4) obtenido es el punto medio del segmento AA':

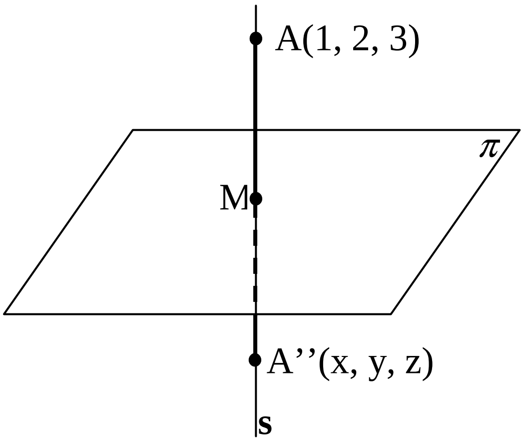
$$N = \frac{A+A'}{2}\ \Rightarrow\ A' = 2N - A = (4,\ 2,\ 8)-(1,\ 2,\ 3) \Rightarrow\ \underline{\underline{A'(3,\ 0,\ 5)}}.$$

b)

Un vector normal del plano $\pi \equiv x+y+z=3$ es $\overrightarrow{n} = (1,\ 1,\ 1)$.

La recta s es la que pasa por el punto A y es perpendicular al plano π tiene como vector director al vector $\overrightarrow{n} = (1,\ 1,\ 1)$; su ecuación dada por unas ecuaciones paramétricas es $s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases}$.

El punto M, intersección del plano π con la recta s, tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo cual:



$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+y+z=3 \\ s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (1+\lambda)+(2+\lambda)+(3+\lambda)=3 \;;;$$

$$6+3\lambda = 3 \;;;\; 3\lambda = -3 \;;;\; \underline{\lambda = -1} \;\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1-1 = 0 \\ y = 2-1 = 1 \\ z = 3-1 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; \underline{M(0,\ 1,\ 2)}$$

Para que A'' sea el punto simétrico de A con respecto a π, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA''} \;\Rightarrow\; M - A = A'' - M \;;;\; (0,\ 1,\ 2)-(1,\ 2,\ 3) = (x,\ y,\ z)-(0,\ 1,\ 2) \;;;$$

$$(-1,\ -1,\ -1) = (x,\ y-1,\ z-2) \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y-1 = -1 \;\rightarrow\; y = 0 \\ z-2 = -1 \;\rightarrow\; z = 1 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{A''(-1,\ 0,\ 1)}}.$$

****

3ª) Un nadador está en el mar en un punto N, situado a 3 km de una playa recta, y justo delante de un punto S, situado en la playa a raíz del agua; y quiere ir a un punto A, situado también a raíz del agua y a 6 km del punto S, de forma que el triángulo NSA es rectángulo en el vértice S. El nadador nada a una velocidad constante de 3 km/h y anda a una velocidad constante de 5 km/h.

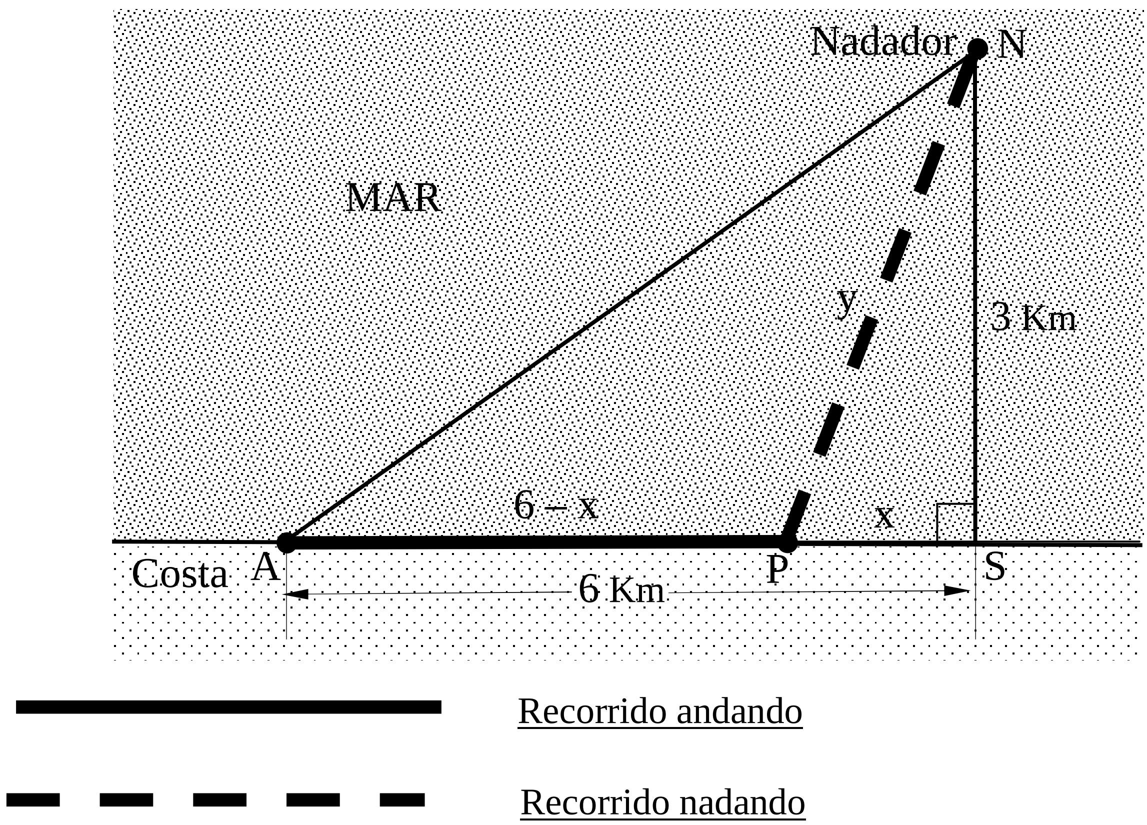
a) Si P es un punto entre el punto S y el punto A que está a una distancia x de S, demostrad que el tiempo, en horas, que necesita el nadador para nadar del punto N hasta el punto P y andar desde el punto P hasta el punto A está determinado por la siguiente expresión : $t(x)=\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}+\frac{6-x}{5}$.

b) Calcule el valor de x que determina el tiempo mínimo que hace falta para ir del punto N al punto A, pasando por P. Cuál es el valor de este tiempo mínimo?

----

a)

La situación aproximada de la situación se refleja en el siguiente esquema:



El tiempo empleado en hacer el recorrido es: $t=\frac{y}{3}+\frac{6-x}{5}$. (1)

El valor de y en función de x se obtiene aplicando Pitágoras al triángulo rectángulo APS:

$y^2=x^2+3^2=x^2+9$;; $\underline{y=\sqrt{x^2+9}}$.

Sustituyendo el valor de y obtenida en la expresión (1) resulta:

$$\underline{\underline{t(x)=\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}+\frac{6-x}{5}}}.$$

<u>Queda demostrado lo pedido.</u>

b)

La condición necesaria para que el tiempo empleado sea mínimo es que su primera derivada se anule:

$$t'(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+9}}-\frac{1}{5}=\frac{x}{3\cdot\sqrt{x^2+9}}-\frac{1}{5}=0\ \Rightarrow\ \frac{x}{3\cdot\sqrt{x^2+9}}=\frac{1}{5}\ ;;\ 5x=3\sqrt{x^2+9}.$$ Elevando los dos términos al cuadrado:

$$25x^2=9\left(x^2+9\right)\ ;;\ 25x^2=9x^2+81\ ;;\ 16x^2=81\ ;;\ x^2=\frac{81}{16}\ \Rightarrow\ x=\sqrt{\frac{81}{16}}=\frac{9}{4}=\underline{2'25\ km}.$$

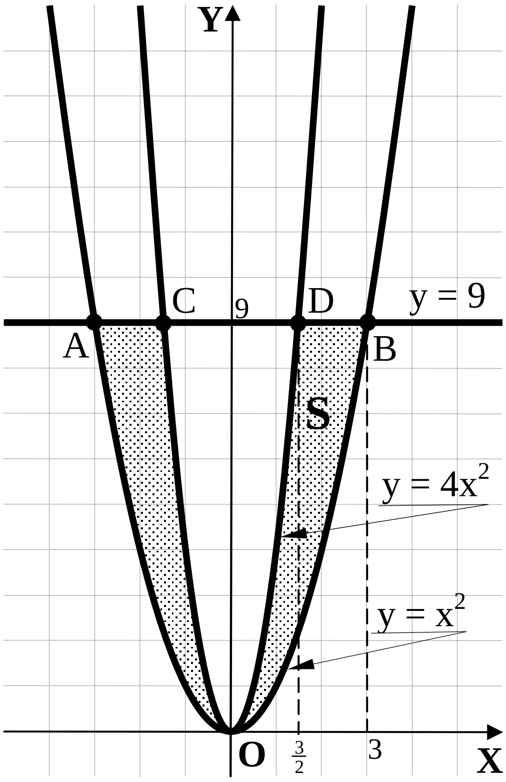
<u>El tiempo es mínimo cuando el punto P está a 2’25 km de S</u>.

$$t\left(\tfrac{9}{4}\right)=\frac{\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2+9}}{3}+\frac{6-\frac{9}{4}}{5}=\frac{\sqrt{\frac{81}{16}+9}}{3}+\frac{\frac{15}{4}}{5}=\frac{3\sqrt{\frac{9}{16}+1}}{3}-\frac{1}{4}=\sqrt{\frac{9+16}{16}}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}+\frac{3}{4}=\underline{2}.$$

<u>El tiempo mínimo es de dos horas</u>.

****

4ª) Calcule el área de la región limitada en el primer cuadrante por las gráficas de las funciones $y = x^2$, $y = 4x^2$ e $y = 9$.



Los puntos de corte de la recta con las curvas se obtienen igualando sus ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \rightarrow \underline{A(-3,\ 9)} \\ x = 3 \rightarrow \underline{B(3,\ 9)} \end{cases}.$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 4x^2 \\ y = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2} \rightarrow \underline{C(-\frac{3}{2},\ 9)} \\ x = \frac{3}{2} \rightarrow \underline{D(\frac{3}{2},\ 9)} \end{cases}.$$

La representación gráfica, aproximada, de la situación se puede observar en el gráfico.

Como se observa, las dos curvas son simétricas con respecto al eje de ordenadas.

Teniendo en cuenta la simetría de las curvas; que las ordenadas de las curvas son iguales o menores que las correspondientes ordenadas de la recta en la zona del área a calcular y que las ordenadas de la curva $y = 4x^2$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la curva $y = x^2$, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_{-3}^{3} (9 - x^2) \cdot dx - \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} (9 - 4x^2) \cdot dx = \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^{3} + \int_{\frac{3}{2}}^{-\frac{3}{2}} (9 - 4x^2) \cdot dx =$$

$$= \left(9 \cdot 3 - \frac{3^3}{3} \right) - \left[9 \cdot (-3) - \frac{(-3)^3}{3} \right] + \left[9x - \frac{4x^3}{3} \right]_{\frac{3}{2}}^{-\frac{3}{2}} =$$

$$= 27 - 9 + 27 - 9 + \left[9 \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) - \frac{4 \cdot \left(-\frac{3}{2} \right)^3}{3} \right] - \left[9 \cdot \frac{3}{2} - \frac{4 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^3}{3} \right] = 36 - \frac{27}{2} + \frac{9}{2} - \frac{27}{2} + \frac{9}{2} = 36 - 18 = \underline{\underline{18\ u^2 = S}} \cdot$$

O de otra manera:

$$S = 2 \cdot \left[\int_0^3 (9 - x^2) \cdot dx - \int_0^{\frac{3}{2}} (9 - 4x^2) \cdot dx \right] = 2 \cdot \left\{ \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 - \left[9x - \frac{4x^3}{3} \right]_0^{\frac{3}{2}} \right\} =$$

$$= 2 \cdot \left[\left(9 \cdot 3 - \frac{3^3}{3} \right) - \left(9 \cdot \frac{3}{2} - \frac{4 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^3}{3} \right) \right] = 2 \cdot \left(27 - 9 - \frac{27}{2} + \frac{9}{2} \right) = 2 \cdot (18 - 9) = 2 \cdot 9 = \underline{\underline{18\ u^2 = S}}\ .$$

****

5ª) Dadas las de R^3 de ecuaciones $r \equiv \frac{x-2}{3} = y = \frac{z+1}{4}$ y $s \equiv (x,\ y,\ z) = (1+2a,\ 3-a,\ 4+3a)$, con $a \in R$.

a) Comprobad que los puntos medios de los segmentos que tienen un extremo situado sobre la recta r y el otro extremo situado sobre la recta s están en un plano π.

b) Encontrad la ecuación general del plano π.

----

a)

La expresión por unas ecuaciones paramétricas de r es $r \equiv \begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1+4\lambda \end{cases}$.

Tres puntos de r son $A_1(2, 0, -1)$, $A_2(5, 1, 3)$ y $A_3(11, 3, 11)$ y tres puntos de la recta s son $B_1(1, 3, 4)$, $B_2(3, 2, 7)$ y $B_3(5, 1, 10)$.

Los respectivos puntos medios de los anteriores son $M_1\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$, $M_2\left(4,\ \frac{3}{2},\ 5\right)$ y $M_3\left(8,\ 2,\ \frac{21}{2}\right)$.

Los puntos M_1, M_2 y M_3 determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{u'} = \overrightarrow{M_1M_2} = M_2 - M_1 = \left(4,\ \frac{3}{2},\ 5\right) - \left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2},\ 0,\ \frac{7}{2}\right).$$

$$\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{M_1M_3} = M_3 - M_1 = \left(8,\ 2,\ \frac{21}{2}\right) - \left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{13}{2},\ \frac{1}{2},\ 9\right).$$

$\overrightarrow{u'}\ y\ \overrightarrow{v'} \Rightarrow$ Linealmente independiente.

Queda comprobado que los puntos medios forman un plano π.

b)

Considerando los vectores $\overrightarrow{u} = (5,\ 0,\ 7)$ y $\overrightarrow{v} = (13,\ 1,\ 18)$, que son linealmente dependientes de los vectores $\overrightarrow{u'}\ y\ \overrightarrow{v'}$, respectivamente, la expresión general del plano π es la siguiente: $\pi\left(M_1;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-\frac{3}{2} & y-\frac{3}{2} & z-\frac{3}{2} \\ 5 & 0 & 7 \\ 13 & 1 & 18 \end{vmatrix} = 0$;;

$$91\left(y-\frac{3}{2}\right) + 5\left(z-\frac{3}{2}\right) - 7\left(x-\frac{3}{2}\right) - 90\left(y-\frac{3}{2}\right) = 0\ ;;\ y - \frac{3}{2} + 5z - \frac{15}{2} - 7x + \frac{31}{2} = 0\ ;;\ 7x - y - 5z - \frac{3}{2} = 0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 14x - 2y - 10z - 3 = 0}}$$

****

6ª) Responded a las siguientes cuestiones:

a) Demostrad que si A es una matriz cuadrada que satisface la igualdad $A^2 = I$, donde I es la matriz identidad, siendo A inversible, A^{-1} satisface $\left(A^{-1}\right)^2 = I$.

b) Calcule la expresión general de las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$ con b ≠ 0 que satisface la igualdad $A^2 = I$.

----

a)

Sabiendo que $\left(A^{-1}\right)^2 = A^{-1\cdot 2} = \left(A^2\right)^{-1} = I^{-1} = I \Rightarrow \underline{\underline{\left(A^{-1}\right)^2 = I}}$.

b)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + 2b \\ ac + 2c & bc + 4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a+2) \\ c(a+2) & bc + 4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} a^2 + bc = 1 \\ c(a+2) = 0 \\ b(a+2) = 0 \\ bc + 4 = 1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \to Si\ \ b \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{a = -2}} \\ \to \underline{bc = -3} \end{matrix} \Rightarrow \quad \Rightarrow \underline{\underline{A = \begin{pmatrix} -2 & b \\ c & 2 \end{pmatrix}, \ \forall b,\ c \Rightarrow b \cdot c = -3}}.$$

Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I}.$$

****