PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

COMUNIDAD DE CATALUÑA

JUNIO – 2014

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las siguientes seis cuestiones. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Puede utilizar calculadora, pero no pueden utilizarse calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

CUESTIONES

1ª) Considere la matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{bmatrix}$, $con\ a \in R$.

a) Calcule el rango de la matriz M en función de los valores del parámetro α.

b) Discuta y resuelva el sistema de ecuaciones lineales $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, según los valores del parámetro α.

2ª) Considere el punto A(1, 2, 3):

a) Calcule el punto simétrico con respecto a la recta $r \equiv (x,\ y,\ z) = (3+\lambda,\ 1,\ 3-\lambda)$ del punto A.

b) Calcule el punto simétrico de A respecto del plano $\pi \equiv x + y + z = 3$.

3ª) Un nadador está en el mar en un punto N, situado a 3 km de una playa recta, y justo delante de un punto S, situado en la playa a raíz del agua; y quiere ir a un punto A, situado también a raíz del agua y a 6 km del punto S, de forma que el triángulo NSA es rectángulo en el vértice S. El nadador nada a una velocidad constante de 3 km/h y anda a una velocidad constante de 5 km/h.

a) Si P es un punto entre el punto S y el punto A que está a una distancia x de S, demostrad que el tiempo, en horas, que necesita el nadador para nadar del punto N en su punto medio P y andar desde el punto P hasta el punto A está determinado por la expresión $t(x)=\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}+\frac{6-x}{5}$.

b) Calcule el valor de x que determina el tiempo mínimo que hace falta para ir del punto N al punto A, pasando por P. Cuál es el valor de este tiempo mínimo?

4ª) Calcule el área de la región limitada en el primer cuadrante por las gráficas de las funciones $y=x^2$, $y=4x^2$ e $y=9$.

5ª) Dadas las de R^3 de ecuaciones $r\equiv\frac{x-2}{3}=y=\frac{z+1}{4}$ y $s\equiv(x,\ y,\ z)=(1+2a,\ 3-a,\ 4+3a)$, con $a\in R$.

a) Comprobad que los puntos medios de los segmentos que tienen un extremo situado sobre la recta r y el otro extremo situado sobre la recta s están en un plano π.

b) Encontrad la ecuación general del plano π.

6ª) Responded a las siguientes cuestiones:

a) Demostrad que si A es una matriz cuadrada que satisface la igualdad $A^2=I$, donde I es la matriz identidad, siendo A inversible, A^{-1} satisface $\left(A^{-1}\right)^2=I$.

b) Calcule la expresión general de las matrices de la forma $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$ con b ≠ 0 que satisface la igualdad $A^2 = I$.

****