# PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

# COMUNIDAD DE CATALUÑA

# SEPTIEMBRE – 2014

MATEMÁTICAS II                                    Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis siguientes cuestiones. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Puede utilizar calculadora, pero no pueden utilizarse calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

CUESTIONES

1ª) Sean las rectas r y s de $R^3$ siguientes: $r \equiv x+5 = y-5 = \frac{z-3}{2}$ y $s \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

a ) Estudie el paralelismo y la perpendicularidad entre las rectas r y s.

b ) Encontrar la ecuación general (es decir, en la forma $Ax+By+Cz+D=0$) del plano $\pi$ que contenga a la recta r y es paralelo a la recta s. Calcule la distancia entre la recta s y el plano $\pi$ obtenido.

----------

a )

Los vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 1,\ 2)$ y $\overrightarrow{v_s} = (2,\ 3,\ 1)$.

Dos rectas son paralelas cuando sus vectores directores son linealmente dependientes, o sea, que sus componentes son proporcionales: $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3} \neq \frac{2}{1}$.

Las rectas r y s no son paralelas.

Dos rectas son perpendiculares cuando lo son sus vectores directores.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = (1,\ 1,\ 2) \cdot (2,\ 3,\ 1) = 2+3+2 = 7 \neq 0$.

Las rectas r y s no son perpendiculares.

b )

El plano π por contener a la recta r tiene como vector director al vector director de la recta y contiene al punto A(-5, 5, 3) perteneciente a r.

El plano π por ser paralelo la recta s tiene como vector director al vector director de la recta s.

La expresión general del plano pedido es $\pi\left(A;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}\right) \equiv \begin{vmatrix} x+5 & y-5 & z-3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$ ;;

$-(x+5)+4(y-5)+3(z-3)-2(z-3)-6(x+5)+(y-5)=0$ ;; $-7(x+5)+5(y-5)+(z-3)=0$ ;;

$-7x-35+5y-25+z-3=0$ ;; $-7x+5y+z-63=0$.

$$\underline{\underline{\pi \equiv 7x-5y-z+63=0}}.$$

**********

2ª) Sean las funciones $f(x)=\frac{e^{ax}+b}{4}$ y $g(x)=+\sqrt{3x+4}$.

a ) Determine el dominio y el recorrido de la función g.

b ) Calcule para qué valores de α y b las gráficas de las dos funciones son tangentes (es decir, tienen la misma recta tangente) en el punto de abscisa x = 0.

----------

a )

El dominio de la función g es el conjunto de valores reales de x tal que $3x+4\geq 0$.

$$3x\geq -4\ ;;\ x\geq -\frac{4}{3}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{D(g)\Rightarrow\left(-\frac{4}{3},\ +\infty\right)}}.$$

Por ser $g(x)\geq 0,\ \forall x\in D(g)$ es $\underline{\underline{R(g)\Rightarrow(0,\ +\infty)}}$.

b )

El punto de tangencia es único para ambas funciones, por lo cual: $f(0)=g(0)$.

$$f(0)=g(0)\ \Rightarrow\ \frac{e^0+b}{4}=+\sqrt{4}\ ;;\ 1+b=4\cdot 2=8\ \Rightarrow\ \underline{\underline{b=7}}.$$

Para b = 7 es $f(x)=\frac{e^{ax}+7}{4}=\frac{1}{4}\left(e^{ax}+7\right)$.

La pendiente a una función en un punto es igual al valor de su primera derivada en ese punto, lo que implica que las derivadas de las dos funciones son iguales para el valor x = 0.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\frac{1}{4}\cdot a\cdot e^{ax}=\frac{ae^{ax}}{4}\ \Rightarrow\ f'(0)=\frac{a\cdot e^0}{4}=\underline{\frac{a}{4}} \\ \\ g'(x)=\frac{3}{+2\sqrt{3x+4}}\ \Rightarrow\ g'(0)=\frac{3}{2\sqrt{4}}=\underline{\frac{3}{4}} \end{array}\right\}\Rightarrow\ \frac{a}{4}=\frac{3}{4}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{a=3}}.$$

**********

3ª) Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} mx-y=m \\ 3x+(m-4)y=m+2 \end{cases}$, $para \;\; m\in R$.

a ) Discutir el sistema de ecuaciones para los diferentes valores del parámetro m.

b ) Resolver el sistema en aquellos casos en que el sistema sea compatible.

----------

a )

Las matrices de coeficientes y ampliada son, respectivamente, las siguientes:

$A=\begin{pmatrix} m & -1 \\ 3 & m-4 \end{pmatrix}$ y $A'=\begin{pmatrix} m & -1 & m \\ 3 & m-4 & m+2 \end{pmatrix}$.

El rango de A en función del parámetro m es:

$$|A|=\begin{vmatrix} m & -1 \\ 3 & m-4 \end{vmatrix}=m^2-4m+3=0 \;;;\; m=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=2\pm 1 \Rightarrow \underline{m_1=1},\; \underline{m_2=3}.$$

$$\underline{\underline{Para \left\{\begin{matrix} m\neq 1 \\ m\neq 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Rango\;\; A=Rango\;\; A'=2=n^o\;\; incóg \Rightarrow Compatible\;\; \det er\min ado}}.$$

Para m = 1 es $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ y $A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ <u>Rango A = Rango A’ = 1</u>.

$$\underline{\underline{Para\;\; m=1 \Rightarrow Rango\;\; A=Rango\;\; A'=1<n^o\;\; incóg \Rightarrow Compatible\;\; in\det er\min ado}}.$$

Para m = 3 es $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $A'=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$ <u>Rango A = 1 y Rango A’ = 2</u>.

$$\underline{\underline{Para\;\; m=3 \Rightarrow Rango\;\; A=1 \;;;\; Rango\;\; A'=2 \Rightarrow Incompatible}}.$$

b )

Resolvemos en el caso de compatible determinado.

$$\left.\begin{cases} mx-y=m \\ 3x+(m-4)y=m+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -3mx+3y=-3m \\ 3mx+m(m-4)y=m^2+2m \end{matrix}\right\} \Rightarrow [m(m-4)+3]y=m^2-m \;;;$$

$$(m^2-4m+3)y=m(m-1) \;;;\; y=\frac{m(m-1)}{(m-1)(m-3)} \;;;\; \underline{\underline{y=\frac{m}{m-3}}} \;;;\; x=\frac{y}{m}+1=\frac{m}{m(m-3)}+1=\frac{1}{m-3}+1=$$

$$=\frac{m-3+1}{m-3} \;;;\; \underline{\underline{x=\frac{m-2}{m-3}}}.$$

Para m = 1 el sistema es $\begin{cases} x-y=1 \\ 3x-3y=3 \end{cases}$, equivalente a $\{x-y=1$, cuya solución es:

$$\underline{\underline{\left.\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \end{cases}\right\}, \ \forall \lambda \in R.}}$$

**********

4ª) Se sabe que la función f tiene por derivada la función $f'(x)=(3x-2)^2(x-2)$.

a ) Calcule los valores de x en que la función f tiene un máximo relativo, un mínimo relativo o un punto de inflexión, e indique en cada caso de qué se trata.

b ) Determine la función f sabiendo que se anula en el punto de abscisa x = 2.

----------

a )

Para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada.

$$f'(x)=0 \Rightarrow (3x-2)^2(x-2)=0 \Rightarrow \underline{x_1=\frac{2}{3}} \;;;\; \underline{x_2=2}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda deriva; si es positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un mínimo y, si es negativa de un máximo.

$$f''(x)=[2\cdot(3x-2)\cdot 3]\cdot(x-2)+(3x-2)^2\cdot 1=6(3x-2)(x-2)+(3x-2)^2=$$

$$=(3x-2)[6(x-2)+(3x-2)]=(3x-2)(6x-12+3x-2)=(3x-2)(9x-14)=27x^2-42x-18x+28=$$

$$=\underline{27x^2-60x+28=f''(x)}.$$

$$f''\left(\tfrac{2}{3}\right)=27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-60\cdot\frac{2}{3}+28=27\cdot\frac{4}{9}-40+28=12-12=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ <u>No existen ni máximo ni mínimo relativos para x = 2/3.</u>

$$f''(2)=27\cdot 2^2-60\cdot 2+28=27\cdot 4-120+28=108-92=16>0 \Rightarrow \underline{\underline{Mín.\ relativo\ en\ x=2}}.$$

La condición necesaria para que una función polinómica tenga un punto de inflexión es que se anule su segunda derivada.

$$f''(x)=(3x-2)(9x-14) \Rightarrow f''(x)=0 \Rightarrow (3x-2)(9x-14)=0 \Rightarrow \underline{x_1=\frac{2}{3}} \;;;\; \underline{x_2=\frac{14}{9}}.$$

$$\underline{\underline{Existen\ P.\ I.\ para\ x=\frac{2}{3}\ y\ x=\frac{14}{9}}}.$$

b )

$$f(x)=\int f'(x)\cdot dx=\int (3x-2)^2(x-2)\cdot dx=\int (9x^2-12x+4)(x-2)\cdot dx=$$

$$= \int \left(9x^3 - 18x^2 - 12x^2 + 24x + 4x - 8\right) \cdot dx = \int \left(9x^3 - 30x^2 + 28x - 8\right) \cdot dx =$$

$$= \frac{9x^4}{4} - \frac{30x^3}{3} + \frac{28x^2}{2} - 8x + C = \underline{\frac{9x^4}{4} - 10x^3 + 14x^2 - 8x + C = f(x)}.$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow \frac{9 \cdot 2^4}{4} - 10 \cdot 2^3 + 14 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + C = 0 \;;;\; 36 - 80 + 56 - 16 + C = 0 \;;;\; -4 + C = 0 \;;;$$

$\underline{C = 4}$.

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{9x^4}{4} - 10x^3 + 14x^2 - 8x + 4}}.$$

**********

5ª) Dados los vectores $\overrightarrow{u}=(2,\ -1,\ 0)$, $\overrightarrow{v}=(-1,\ 3,\ 4)$ y $\overrightarrow{w}=(0,\ 3a-1,\ 4a)$:

a ) Calcule los valores del parámetro α para que los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ sean linealmente dependientes.

b ) Calcule los valores del parámetro α para que un tetraedro de aristas $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ tenga un volumen de 2/3 de unidades cúbicas.

----------

a )

Para que los vectores $\left\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right\}$ sean linealmente dependientes es condición necesaria que sea nulo el valor del determinante que forman, lo que significa que el rango que tengan sea menor que tres.

$$Rango\ \left\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3a-1 & 4a \end{vmatrix} = 24a-8(3a-1)-4a=0\ ;;\ 24a-24a+8-4a=0\ ;;$$

$2-a=0\ ;;\ \underline{a=2}$.

<u>Los vectores dados son linealmente independientes para α = 2</u>.

b )

Sabiendo que el volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores que lo determinan, en valor absoluto, será:

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left|\left[\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\right]\right|=\frac{2}{3}\ ;;\ \left\|\begin{matrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3a-1 & 4a \end{matrix}\right\|=4\ ;;\ -4a+8=4\ ;;\ 4a=4\ ;;\ \underline{\underline{a=1}}.$$

**********

6ª) Sea la ecuación matricial $X \cdot A = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -3 & a-1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$:

a ) ¿Para qué valores del parámetro α la ecuación matricial tiene solución única?

b ) Encuentre la matriz X que satisfaga la ecuación matricial cuando α = 3.

----------

a )

El sistema tendrá solución única cuando exista la matriz inversa de A, que es necesaria para la resolución de la ecuación matricial propuesta.

Una matriz es inversible cuando el valor de su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -3 & a-1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 + (a-1) - 3 + a = 0 \;;\; -6 + a - 1 + a = 0 \;;\; 2a - 7 = 0 \Rightarrow \underline{a = \frac{7}{2}}$$

<u>La ecuación matricial tiene solución única cuando α = 7/2</u>.

b )

Multiplicando por $A^{-1}$ los dos términos de la ecuación matricial $X \cdot A = B$ por la derecha resulta:

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \;;\; X \cdot I = B \cdot A^{-1} \Rightarrow \underline{X = B \cdot A^{-1}}. \quad (*)$$

Para α = 3 es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $|A| = 2 \cdot 3 - 7 = -1$. $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$Adj\left(A^T\right) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

.

Sustituyendo en (*) y operando:

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9-10-12 & 3+4+4 & 3+2-0 \\ 15-10+15 & -5+4-5 & -5+2+0 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\underline{X = \begin{pmatrix} -31 & 11 & 5 \\ 20 & -6 & -3 \end{pmatrix}}}$$

.

**********