PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

JUNIO – 2015

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadoras, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{l} -3x+2y+3z=0 \\ (a-2)y-3z=0 \\ -x-y+(-a-3)z=0 \end{array}\right.$:

a) Calcule para qué valores del parámetro ɑ el sistema tiene más de una solución.

b) Resuelva el sistema para el caso de ɑ = -3.

----

a)

Se trata de un sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es la siguiente:

$$M=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & a-2 & -3 \\ 1 & 1 & a+3 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro a es:

$$|M|=\begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & a-2 & -3 \\ -1 & -1 & a-3 \end{vmatrix}=-3(a-2)(a+3)-6-3(a-2)-9=$$

$$=-3(a-2)(a+3+1)-15=-3(a-2)(a+4)-15=$$

$$=-3(a^2+2a-8)-15=-3(a^2+2a-3)=0;\ \ a^2+2a-3=0;$$

$$a=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=-1\pm 2\ \Rightarrow\ \boldsymbol{x_1=-3, x_2=1}.$$

$$\underline{Para\ a\neq -3\ y\ a\ \neq 1\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M = 2}.$$

$$Para\ a = -3 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M = 2}.$$

$$\underline{Para\ a = -3, a = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$\underline{El\ sistema\ tiene\ más\ de\ una\ solución\ para\ a = -3\ y\ para\ a = 1.}$$

$b)$

$Para\ a = -3\ el\ sistema\ resulta$: $\begin{cases} -3x + 2y + 3z = 0 \\ -5y - 3z = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$. Despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la primera y, haciendo $x = \lambda$:

$-\lambda - y = 0;\ \ y = -\lambda;\ \ 5\lambda - 3z = 0;\ \ z = \frac{5}{3}\lambda.$

$$\underline{Solución: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \frac{5}{3}\lambda \end{cases}, \forall \lambda \in R}$$

****

2º) Sea r la recta del espacio que tiene por ecuación $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = z$ y sea P el punto de coordenadas P≡(6, 0, -1).

a) Encuentre la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma Ax + By + Cz = D) del plano que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r.

b) Encuentre la ecuación paramétrica del plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r.

----

a)

Una recta y un plano se cortan perpendicularmente cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano son linealmente dependientes (paralelos).

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (2, -1, 1)$.

La expresión general del plano π buscado es $\pi \equiv 2x - y + z + D = 0$. Como este plano contiene al punto P(6, 0, -1) tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y + z + D = 0 \\ P(6, 0, -1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 6 - 0 - 1 + D = 0;\ \ 11 + D = 0 \Rightarrow D = -11.$$

$$\underline{\pi \equiv 2x - y + z - 11 = 0}.$$

b)

El plano β pedido, paralelo a π, que contiene a r debe contener a todos sus puntos, uno de los cuales es Q(1, -3, 0).

$$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv 2x - y + z + D = 0 \\ Q(1, -3, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 1 + 3 + D = 0;\ \ 5 + D = 0 \Rightarrow D = -5.$$

$$\underline{\beta \equiv 2x - y + z - 5 = 0}.$$

****

3º) Responda a las siguientes cuestiones:

a) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3$ en el punto de abscisa x = 2.

b) Calcule el área de la región plana finita limitada por la curva $y = x^3$ y la recta de ecuación $y = 3x - 2$.

----

a)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = 3x^2 \;\;\Rightarrow\;\; m = f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = \mathbf{12}.$$

El punto de tangencia es el siguiente: $f(2) = 2^3 = 8 \;\Rightarrow \boldsymbol{P(2, 8)}$.

La recta que pasa por un punto conocida la pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$:

$$y - 8 = 12 \cdot (x - 2) = 12x - 24 \;\;\Rightarrow\;\; \underline{Tangente\colon\; t \equiv 12x - y - 16 = 0}.$$

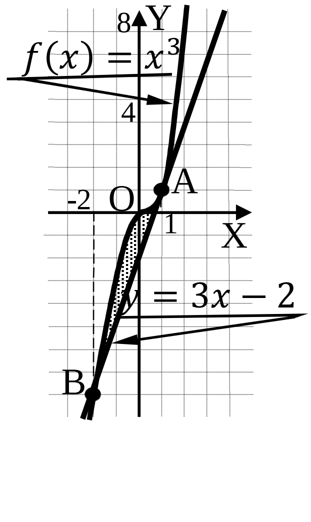
b)

Las abscisas de los puntos de corte de la curva y la recta son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0
1		1	2	
	1	2	0	
-2		-2		
	1	0		

$$x^3 = 3x - 2;\; x^3 - 3x + 2 = 0.$$

Los puntos de corte son A(1, 1) y B(-2, -8).



En el intervalo correspondiente al área a calcular, todas las ordenadas de la curva son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la recta.

El área a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{-2}^{1} [x^3 - (3x - 2)] \cdot dx = \int_{-2}^{1} (x^3 - 3x + 2) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2\right) - [4 - 6 - 4] =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 + 6 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 8 = \frac{1-6+32}{4} = \underline{\frac{27}{4}\; u^2}.$$

****

4º) Considere en R^3 la recta que tiene por ecuación $r: (x, y, z) = (-4 + 2k, -2, 1 - k)$ y los planos $\pi_1 \equiv x + 2y + 2z = -1$ y $\pi_2 \equiv x - 2y + 2z = -3$, respectivamente.

a) Determine la posición relativa de los planos π_1 y π_2.

b) Compruebe que todos los puntos de la recta r están situados a la misma distancia de los planos π_1 y π_2.
Nota: puede calcularse la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

----

a)

Los vectores normales de los planos π_1 y π_2 son $\overrightarrow{n_1} = (1, 2, 2)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1, -2, 2)$ respectivamente, que son linealmente independientes por no tener proporcionales sus componentes y no son perpendiculares por ser distinto de cero su producto escalar, por lo cual:

$$\underline{Los\ planos\ \pi_1\ y\ \pi_2\ se\ cortan\ en\ una\ recta.}$$

b)

Aplicando la fórmula dada, se determina la distancia de r a cada uno de los dos planos:

$$d(\pi_1, r) = \frac{|-4+2k+2\cdot(-2)+2\cdot(1-k)+1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{|-4+2k-4+2-2k+1|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|-5|}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}.$$

$$d(\pi_2, r) = \frac{|-4+2k-2\cdot(-2)+2\cdot(1-k)+3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{|-4+2k+4+2-2k+3|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|+5|}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}.$$

$$\underline{Queda\ demostrado\ que\ la\ recta\ r\ equidista\ de\ los\ planos\ \pi_1\ y\ \pi_2.}$$

****

5º) Responda a las siguientes cuestiones:

$a)$ Calcule la matriz de la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ que satisface $A^2 - A = I$, donde I es la matriz identidad, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$b)$ Calcule A^{-1} y compruebe que el resultado se corresponde con el que se obtiene de deducir la matriz A^{-1} a partir de la igualdad $A^2 - A = I$.

$a)$

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & a \\ 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

$$A^2 - A = I \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow \boldsymbol{a = 1}.$$

$$\underline{La\ matriz\ pedida\ es\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

$b)$

La matriz A^{-1} se obtiene por el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 - F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

$A^2 - A = I;\;\; A(A - I) = I$. Multiplicando por la izquierda por A^{-1}:

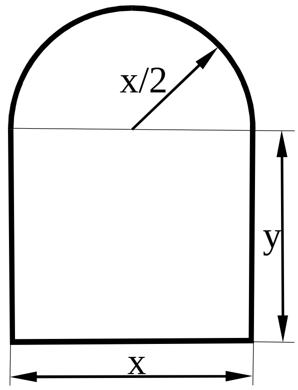
$$A^{-1} \cdot A(A - I) = A^{-1} \cdot I;\;\; I \cdot (A - I) = A^{-1};\; A^{-1} = A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

$$\underline{Se\ obtiene\ el\ mismo\ resultado, como\ cabía\ esperar.}$$

****

6º) La portalada de una catedral está formada, en su parte superior, por un arco de media circunferencia que descansa sobre dos columnas, tal como ilustra la figura adjunta, donde x es el diámetro de la circunferencia, es decir, la distancia entre columnas, e y es la altura de cada columna.



a) Compruebe que la función $f(x, y) = \frac{\pi x^2}{8} + xy$ determina el área de esta portada.

b) Si el perímetro de la portalada es de 20 m, determine las medidas de x e y de la portalada que maximizan su área.

----

a)

$$S = x \cdot y + \frac{\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = x \cdot y + \frac{\pi x^2}{8} \Rightarrow \underline{S = f(x, y) = \frac{\pi x^2}{8} + xy}, \text{ como q. c.}$$

b)

$$Perímetro = p = x + 2y + \pi \cdot \frac{x}{2} = 20; \;\; 2x + 4y + \pi x = 40;$$

$$4y = 40 - 2x - \pi x = 40 \Rightarrow y = \frac{40 - 2x - \pi x}{4} = \mathbf{10} - \frac{\mathbf{2+\pi}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{x}.$$

Sustituyendo el valor obtenido de y en la expresión de la superficie:

$$S(x) = x \cdot \frac{40 - 2x - \pi x}{4} + \frac{\pi x^2}{8} = \frac{80x - 4x^2 - 2\pi x^2 + \pi x^2}{8} = \frac{\mathbf{80}\boldsymbol{x} - \mathbf{4}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \boldsymbol{\pi x}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{8}}.$$

Para que la superficie sea mínima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$S'(x) = \frac{80 - 8x - 2\pi x}{8} \Rightarrow S'(x) = 0 \Rightarrow 80 - 8x - 2\pi x = 0; \; 40 - 4x - \pi x = 0;$$

$$40 = 4x + \pi x = (4 + \pi)x \Rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{40}}{\mathbf{4+\pi}} \cong \mathbf{5,60}.$$

Justificación de que se trata de un máximo:

$$S''(x) = \frac{1}{8} \cdot (-8 - 2\pi) < 0 \Rightarrow \boldsymbol{Máximo, c.q.j}.$$

$$y = 10 - \frac{2+\pi}{4} \cdot \frac{40}{4+\pi} = 10 - 10 \cdot \frac{2+\pi}{4+\pi} = 10 - 10 \cdot \frac{5,14}{7,14} \cong 10 - 7,20 = \mathbf{2,8}.$$

$$\underline{Los\ valores\ que\ maximizan\ la\ superficie\ son\ x = 5,60\ m\ e\ y = 2,8\ m.}$$

****