

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

JUNIO – 2015

MATEMÁTICAS II

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadoras, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} -3x + 2y + 3z = 0 \\ (a - 2)y - 3z = 0 \\ -x - y + (-a - 3)z = 0 \end{cases} :$

a) Calcule para qué valores del parámetro a el sistema tiene más de una solución.

b) Resuelva el sistema para el caso de $a = -3$.

2º) Sea r la recta del espacio que tiene por ecuación $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = z$ y sea P el punto de coordenadas $P(6, 0, -1)$.

a) Encuentre la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r .

b) Encuentre la ecuación paramétrica del plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r .

3º) Responda a las siguientes cuestiones:

a) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3$ en el punto de abscisa $x = 2$.

b) Calcule el área de la región plana finita limitada por la curva $y = x^3$ y la recta de ecuación $y = 3x - 2$.

4º) Considere en \mathbb{R}^3 la recta que tiene por ecuación $r: (x, y, z) = (-4 + 2k, -2, 1 - k)$ y los planos $\pi_1 \equiv x + 2y + 2z = -1$ y $\pi_2 \equiv x - 2y + 2z = -3$, respectivamente.

a) Determine la posición relativa de los planos π_1 y π_2 .

b) Compruebe que todos los puntos de la recta r están situados a la misma distancia de los planos π_1 y π_2 .

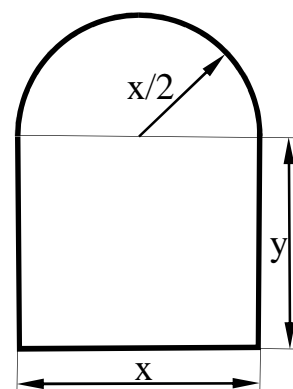
Nota: puede calcularse la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

5º) Responda a las siguientes cuestiones:

a) Calcule la matriz de la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ que satisface $A^2 - A = I$, donde I es la matriz identidad, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Calcule A^{-1} y compruebe que el resultado se corresponde con el que se obtiene de deducir la matriz A^{-1} a partir de la igualdad $A^2 - A = I$.

6º) La portalada de una catedral está formada, en su parte superior, por un arco de media circunferencia que descansa sobre dos columnas, tal como ilustra la figura adjunta, donde x es el diámetro de la circunferencia, es decir, la distancia entre columnas, e y es la altura de cada columna.



a) Compruebe que la función $f(x, y) = \frac{\pi x^2}{8} + xy$ determina el área de esta portalada.

b) Si el perímetro de la portalada es de 20 m, determine las medidas de x e y de la portalada que maximizan su área.
