PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2015

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadoras, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$.

a) Determine para qué valores de α existe A^{-1}.

b) Calcule A^{-1} para α = 0.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix} = 1 - 2a + a^2 = (a-1)^2 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{a = 1}.$$

$$\underline{A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \{1\}}.$$

b)

Para $a = 0$ es $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $|A| = 1$ y $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$Adj.\,de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) En el espacio tridimensional considere la recta $r: (x, y, z) = (3 + 2a, -a, 3 - a)$ y los planos $\pi_1 \equiv x + y + z = -1$ y $\pi_2 \equiv (x, y, z) = (2 + \lambda, 1 - \lambda + \mu, \mu)$.

a) Calcule la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma Ax + By + Cz = D) del plano π_2.

b) Encuentre los dos puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2.
Nota: puede calcularse la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

----

a)

Dos vectores directores de π_2 son $\vec{u} = (1, 1, 0)$ y $\vec{v} = (0, 1, 1)$ y un punto de este plano es $P(2, 1, 0)$.

$$\pi_2(P;\ \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ -(x-2) + z - (y-1) = 0;$$

$$-x + 2 + z - y + 1 = 0\ \Rightarrow\ \underline{\pi_2 \equiv x + y - z - 3 = 0}.$$

b)

Un punto genérico de r es $Q(3 + 2a, -a, 3 - a)$.

$$d(Q, \pi_1) = \frac{|3+2a-a+3-a+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|7|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{7}{\sqrt{3}}.$$

$$d(Q, \pi_2) = \frac{|3+2a-a-3+a-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{|2a-3|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|2a-3|}{\sqrt{3}}.$$

$$d(Q, \pi_1) = d(Q, \pi_2)\ \Rightarrow\ \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{|2a-3|}{\sqrt{3}}\ \Rightarrow\ |2a-3| = 7\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix} 2a - 3 = 7 \\ -2a + 3 = 7 \end{matrix}\right\}\ \Rightarrow$$

$$2a = 10 \rightarrow \boldsymbol{a_1 = 5};\ -2a + 3 = 7; 2a = -4 \rightarrow \boldsymbol{a_2 = -2}.$$

Los puntos pedidos son: $\underline{Q_1(13, -5, -2)}$ y $\underline{Q_2(-1, 2, 5)}$.

****

3º) Sea la función $f(x) = e^x - x - 2$:

a) Demuestre que la función f tiene una raíz (un cero) en el intervalo [0, 2].

b) Compruebe que la función es monótona en el intervalo [0, 2] y calcule las coordenadas de los puntos mínimo absoluto y máximo absoluto de la función en dicho intervalo.

----

a)

La función $f(x) = e^x - x - 2$ es continua en su dominio, por lo cual, le es aplicable el teorema de Bolzano a cualquier intervalo cerrado que se considere, por ejemplo, al intervalo [0, 2]:

$$f(0) = e^0 - 0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0.$$

$$f(2) = e^2 - 2 - 2 = e^2 - 4 = 7{,}39 - 4 = 3{,}39 > 0.$$

$$\underline{Lo\ anterior\ demuestra\ que\ la\ función\ f(x)\ tiene\ una\ raíz\ en\ [0,2], c.q.d.}$$

b)

$$f'(x) = e^x - 1 \geq 0, \forall x \in [0,2].$$

$$\underline{Lo\ anterior\ prueba\ que\ f(x)\ es\ mononota\ creciente\ en\ [0,2]}.$$

$$Máximo\ absoluto\ de\ f(x)\ en\ [0,2]\ \Rightarrow f(2) = 3{,}39\ \Rightarrow\ \underline{A(2, 3'39)}.$$

$$Mínimo\ absoluto\ de\ f(x)\ en\ [0,2]\ \Rightarrow f(0) = -1\ \Rightarrow\ \underline{B(0, -1)}.$$

****

4º) Sean los planos de R³ $\pi_1 \equiv -y+z=2$, $\pi_2 \equiv -2x+y+z=1$ y $\pi_3 \equiv 2x-2z=-1$.

a) Calcule la posición relativa de los tres planos.

b) Compruebe que el plano π_3 es paralelo a la recta definida por la intersección de los planos π_1 y π_2.

----

a)

Los tres planos determinan las siguientes matrices de coeficientes y ampliada:

$$M=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Según que los rangos de estas matrices, la posición relativa de los planos son las siguientes:

1º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ un\ punto.$

2º. -- $Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ son\ secantes\ dos\ a\ dos.$

3º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta.$

4º. -- $Rang\ M = 1;\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ son\ paralelos.$

5º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 1 \Rightarrow Los\ planos\ son\ coincidentes.$

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2-2+4=0 \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M = 2}.$$

$$Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2-4+2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Los\ planos\ son\ secantes\ dos\ a\ dos\ (no\ hay\ planos\ paralelos).}$$

b)

Los planos $\pi_1\ y\ \pi_2$ determinan la recta $r \equiv \begin{cases} y-z+2=0 \\ 2x-y-z+1=0 \end{cases}$.

Un vector director es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\overrightarrow{n_1}=(0,1,-1)$ y $\overrightarrow{n_2}=(2,-1,-1)$.

$$\overrightarrow{v_r'} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -i - 2j - 2k - i = -2i - 2j - 2k \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow\; \overrightarrow{v_r} = (1, 1, 1).$

El vector normal del plano π_3 es $\overrightarrow{n_3} = (2, 0, -2)$.

La recta r es paralela al plano π_3 cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares, o sea, que su producto escalar es nulo:

$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n_3} = (1, 1, 1) \cdot (2, 0, -2) = 2 + 0 - 2 = \mathbf{0}.$

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ la\ recta\ r\ es\ paralela\ al\ plano\ \pi_3}.$

****

5º) Sean x e y las medidas de los lados de un rectángulo inscrito en una circunferencia de diámetro 2.

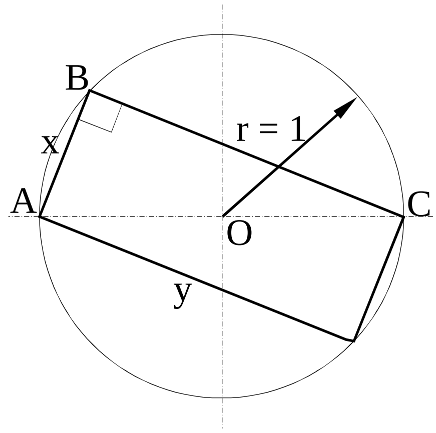
a) Compruebe que la superficie del rectángulo, en función de x, viene dada por la expresión $S(x)=\sqrt{4x^2-x^4}$.

b) Calcule los valores de las medidas de x e y para los cuales la superficie del rectángulo es máxima y calcule el valor de esta superficie máxima.

----

a)

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ABC:



$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2\ \Rightarrow\ 2^2=x^2+y^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{y=\sqrt{4-x^2}}.$$

La superficie del rectángulo es: $S=x\cdot y$.

Sustituyendo en la fórmula de la superficie el valor de y obtenido:

$S=x\cdot y\ \Rightarrow S(x)=x\cdot\sqrt{4-x^2}=\underline{\sqrt{4x^2-x^4}}$, como se quería comprobar.

b)

Para que la superficie sea máxima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$S'(x)=\frac{8x-4x^3}{2\sqrt{4x^2-x^4}}=\frac{4x-2x^3}{x\sqrt{4-x^2}}=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}\Rightarrow S'(x)=0\Rightarrow\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}=0;\ 4-2x^2=0;$$

$2-x^2=0; x=\pm\sqrt{2}$ $(La\ solución\ negativa\ no\ tiene\ sentido\ lógico)$.

$\boldsymbol{x=\sqrt{2}}$. El valor de y es el siguiente: $\boldsymbol{y}=\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}=x$.

$\underline{El\ rectángulo\ de\ área\ máxima\ es\ un\ cuadrado\ de\ lado\ \sqrt{2}\ unidades.}$

$\underline{El\ valor\ de\ la\ superficie\ del\ rectángulo\ es\ de\ 2\ u^2.}$

****

6º) Encuentre todas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ que sean inversas de ellas mismas, es decir, que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = I \;\Rightarrow\; A \cdot A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab + b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ ab + b = 0 \end{cases}.$$

$$a = \pm 1;\;\; ab + b = 0;\;\; b(a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \to b = 0 \\ a = -1 \to b \in R \end{cases}.$$

$$\underline{Soluciones: A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\;\; A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}, \forall b \in R.}$$

****