PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

JUNIO – 2016

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadoras, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x + 4y + 4z = 4k - 7 \\ 2x - ky = -1 \\ -2x = k + 1 \end{cases}$:

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k.

b) Resuelva el sistema para el caso de k = 0.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & -k & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 4k-7 \\ 2 & -k & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & -k & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8k = 0 \Rightarrow k = 0.$$

$$\underline{Para\ k \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

Para k = 0 es $A' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & -7 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = -F_3\} \Rightarrow Rang.\,A' = 2.$

$$\underline{Para\ k \neq 0 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

b)

Resolvemos el sistema para k = 0, que es compatible indeterminado.

El sistema resulta $\begin{cases} 2x + 4y + 4z = -7 \\ 2x = -1 \\ -2x = 1 \end{cases}$, cuyas soluciones son:

$x = -\frac{1}{2}$; $z = \lambda$; $y = \frac{-7-2x-4z}{4} = \frac{-7+1-4z}{4} = -\frac{3}{2} - \lambda.$

$\underline{Solución\text{: } x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{3}{2} - \lambda, z = \lambda, \forall\lambda \in R.}$

****

2º) En R^3, sea la recta $r \equiv (x, y, z) = (1 + \lambda, \lambda, 1 - \lambda)$ y el plano π cuya ecuación general es $\pi \equiv 2x - y + z = -2$.

a) Determine la posición relativa del plano π y la recta r.

b) Calcule la distancia entre la recta r y el plano π.

Nota: puede calcularse la distancia de un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0) al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

----

a)

Un vector director de la recta r y un vector normal del plano π son, respectivamente: $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, -1)\ y\ \vec{n} = (2, -1, 1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}\ y\ \vec{n}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; teniendo en cuenta que:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = (1, 1, -1) \cdot (2, -1, 1) = 2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \vec{n}.$$

$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ paralelos.}$$

b)

La distancia entre la recta r y el plano π es la misma que la de un punto de la recta r al plano; un punto de r es $P(1, 0, 1)$.

Aplicando la fórmula recomendada al plano $\pi \equiv 2x - y + z + 2 = 0$ y al punto $P(1, 0, 1)$:

$$d(\pi, r) = d(P, \pi) = \frac{|2\cdot1-1\cdot0+1\cdot1+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{|2-0+1+2|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{5}{\sqrt{6}}.$$

$$\underline{La\ distancia\ de\ la\ recta\ r\ al\ plano\ \pi\ es\ \frac{5\sqrt{6}}{6}\ unidades.}$$

****

3º) Considere al función $f(x) = x \cdot e^{x-1}$.

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa x = 1.

b) Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

----

a)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = 1 \cdot e^{x-1} + x \cdot e^{x-1} = e^{x-1} \cdot (1 + x).$$

$$f'(1) = m \;\Rightarrow\; e^0 \cdot (1 + 1) = 1 \cdot 2 = 2 \;\Rightarrow \boldsymbol{m = 2}.$$

El punto de tangencia es el siguiente:

$$f(1) = 1 \cdot e^{1-1} = e^0 = 1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{P(1, 1)}.$$

Ecuación de la recta punto-pendiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$; la tangente es:

$$y - 1 = 2 \cdot (x - 1) = 2x - 2 \;\;\Rightarrow\;\; \underline{t \equiv 2x - y - 1 = 0}.$$

b)

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente, en ese punto.

$$f'(x) = e^{x-1} \cdot (1 + x) = 0 \Rightarrow x = -1.$$

Teniendo en cuenta que $e^{x-1} > 0, \forall x \in R$, y que el dominio de la función es R, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x > -1}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x < -1}.$$

****

4º) Responda a las cuestiones siguientes:

a) Calcule todas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}$ que satisfagan la igualdad $A^2 + A = 2I$, siendo I la matriz identidad, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Justifique que si A es una matriz cuadrada que cumple $A^2 + A = 2I$, A es invertible y calcule la expresión de A^{-1} en función de las matrices A e I.

----

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 + A = 2I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I.$$

$$\underline{A^2 + A = 2I, \forall m \in R}.$$

$$\underline{Satisfacen\ la\ igualdad\ todas\ las\ matrices\ de\ la\ forma\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}}.$$

b)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

Sabiendo que el determinante de la suma de dos matrices es la suma de los determinantes de las matrices y que, el determinante del producto de dos matrices es el producto de los determinantes de las matrices:

$$A^2 + A = 2I \ \Rightarrow\ |A^2 + A| = |2I|;\ \ |A^2| + |A| = 2^2 \cdot |I|;\ \ |A \cdot A| + |A| = 4;$$

$$|A| \cdot |A| + |A| = 4 \ \Rightarrow |A| \neq 0.$$

$$\underline{Queda\ justificado\ que\ la\ matriz\ A\ es\ invertible}.$$

$A^2 + A = 2I$. Multiplicando por la derecha por A^{-1}:

$$A \cdot A \cdot A^{-1} + A \cdot A^{-1} = 2I \cdot A^{-1};\ \ A \cdot I + I = 2 \cdot A^{-1} \ \Rightarrow\ \underline{A^{-1} = \tfrac{1}{2} \cdot (A + I)}.$$

****

5º) Considere el tetraedro de vértices $A(x, 0, 1)$, $B(0, x, 1)$, $C(3, 0, 0)$ y $D(0, x, 0)$ siendo $0 < x < 3$.

$a)$ Compruebe que el volumen del tetraedro viene dado por $V(x) = \frac{1}{6}(-x^2 + 3x)$.

$b)$ Determine el valor de x para que el volumen sea máximo y calcule ese volumen.

Nota: Puede calcular el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D viene dado por la expresión $\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right|$.

$a)$

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(0, x, 1) - (x, 0, 1)] = (-x, x, 0).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(3, 0, 0) - (x, 0, 1)] = (3 - x, 0, -1).$$

$$\overrightarrow{AD} = [D - A] = [(0, x, 0) - (x, 0, 1)] = (-x, x, -1).$$

Haciendo uso de la fórmula dada:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -x & x & 0 \\ 3 - x & 0 & -1 \\ -x & x & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot [x^2 - x^2 + x(3 - x)].$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ el\ volumen\ del\ tetraedro\ es\ V(x) = \frac{1}{6}(-x^2 + 3x).}$$

$b)$

El volumen es máximo cuando se anula su primera derivada y su segunda derivada es negativa para los valores que anulan la primera:

$$V'(x) = \frac{1}{6}(-2x + 3) = 0 \Rightarrow -2x + 3 = 0 \to x = \frac{3}{2}.$$

$$V''(x) = \frac{1}{6}(-2) = -\frac{1}{3} < 0 \ \Rightarrow Máximo\ para\ x = \frac{3}{2}.$$

$$V\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{6}\left[-\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{2}\right] = \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{9}{4} + \frac{9}{2}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{8}.$$

$$\underline{El\ volumen\ máximo\ es\ para\ x = \frac{3}{2}\ y\ su\ valor\ es\ \frac{3}{8}\ u^3.}$$

****

6º) Dadas las parábolas $f(x) = x^2 + k^2$ y $g(x) = -x^2 + 9k^2$.

a) Calcule las abscisas, en función de k, de los puntos de corte de las parábolas.

b) Calcule el valor del parámetro k para que el área comprendida entre las parábolas sea de 576 unidades cuadradas.

----

a)

Las abscisas de los puntos de intersección de las parábolas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 + k^2 = -x^2 + 9k^2;\ 2x^2 - 8k^2 = 0\ ;\ 2(x^2 - 4k^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x_1 = -2k} \\ \boldsymbol{x_2 = 2k} \end{cases}.$$

b)

Las parábolas $f(x) = x^2 + k^2$ y $g(x) = -x^2 + 9k^2$ son simétricas con respecto al eje de ordenadas.

Por ser las ordenadas de la parábola cóncava ($\cap$) $g(x) = -x^2 + 9k^2$ mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola convexa ($\cup$) $f(x) = x^2 + k^2$ en el intervalo del área a calcular y teniendo en cuenta su simetría, se deduce que:

$$S = 2 \cdot \int_0^{2k} [(-x^2 + 9k^2) - (x^2 + k^2)]dx = 2 \cdot \int_0^{2k} (-2x^2 + 8k^2) \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \left[-\frac{2x^3}{3} + 8k^2 x\right]_0^{2k} = 2 \cdot \left\{\left[-\frac{2(2k)^3}{3} + 8k^2 \cdot 2k\right] - 0\right\} = 2 \cdot \left(16k^3 - \frac{16k^3}{3}\right) =$$

$$= 32k^3 - \frac{32k^3}{3} = \frac{96k^3 - 32k^3}{3} = \frac{64k^3}{3}.$$

$$S = 576 = \frac{64k^3}{3};\ \ 1.728 = 64k^3 \Rightarrow k^3 = \frac{1.728}{54} = 27 = 3^3 \ \Rightarrow\ \underline{k = 3}.$$

****