PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2016

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadoras, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Sea la recta $r \equiv (x, y, z) = (5 + k, k, -2 - 2k)$ y los puntos $P(1, 0, -1)$ y $Q(2, 1, 1)$.

a) Calcule la ecuación paramétrica de la recta s que pasa por el punto Q y es perpendicular al plano determinado por la recta r y el punto P.

b) Calcule el punto H de la recta r que equidista de los puntos P y Q.

----

a)

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, -2)$.

Un punto de r es $A(5, 0, -2)$.

Los puntos P y A determinan el vector $\overrightarrow{PA} = [A - P] = (4, 0, -1)$.

La expresión general del plano π que determinan la recta r y el punto P es:

$$\pi(P;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{PA}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0;\ -(x-1) - 8y - 4(z+1) + y = 0;$$

$$-x + 1 - 8y - 4z - 4 + y = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\pi \equiv x + 7y + 4z + 3 = 0}.$$

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, 7, 4)$.

La recta s dada por unas ecuaciones paramétricas es: $s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 7\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases}.$

$b)$

Los puntos P y Q determinan el vector $\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = (1, 1, 2)$.

El punto medio M del segmento $\overline{PQ}$ es $M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

El plano mediador β del segmento $\overline{PQ}$ tiene la siguiente expresión general:

$\beta \equiv x + y + 2z + D = 0$.

Como el plano β contiene al punto M tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv x + y + 2z + D = 0 \\ M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2 \cdot 0 + D = 0;\ \ 2 + D = 0 \Rightarrow D = -2.$$

El plano mediador es: $\beta \equiv x + y + 2z - 2 = 0$.

El punto H pedido es la intersección del plano β y la recta r:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv x + y + 2z - 2 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 5 + k \\ y = k \\ z = -2 - 2k \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (5 + k) + k + 2(-2 - 2k) - 2 = 0;$$

$$5 + k + k - 4 - 4k - 2 = 0;\ -1 - 2k = 0;\ \ 1 + 2k = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

$$H \Rightarrow \left.\begin{cases} x = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{H\left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)}.$$

Otra forma de hacer este ejercicio:

Un punto genérico de la recta r es $C(5 + k, k, -2 - 2k)$.

Por definición del ejercicio: $\overline{CP} = \overline{CQ}$.

$$\overline{CP} = \sqrt{(5 + k - 1)^2 + (k - 0)^2 + (-2 - 2k + 1)^2} =$$

$$= \sqrt{(4 + k)^2 + k^2 + (-1 - 2k)^2} = \sqrt{16 + 8k + k^2 + k^2 + 1 + 4k + 4k^2} =$$

$$= \sqrt{6k^2 + 12k + 17}.$$

$$\overline{CQ} = \sqrt{(5+k-2)^2 + (k-1)^2 + (-2-2k-1)^2} =$$

$$= \sqrt{(3+k)^2 + (k-1)^2 + (-3-2k)^2} =$$

$$= \sqrt{9+6k+k^2+k^2-2k+1+9+12k+4k^2} = \sqrt{6k^2+16k+19}.$$

$$\overline{CP} = \overline{CQ} \;\Rightarrow\; \sqrt{6k^2+12k+17} = \sqrt{6k^2+16k+19};$$

$$12k+17 = 16k+19;\; -4k = 2;\;\; 2k = -1 \;\Rightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

$$H \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -2 - 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{H\left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)}.$$

****

2º) Tres números x, y, z, cumplen dos condiciones: que el primero es la suma de los otros dos, y que el segundo es la suma de la mitad del primero y el doble del tercero.

a) Compruebe que el cálculo de los tres números x, y, z, tiene una infinidad de soluciones.

b) Encuentre una expresión general de las soluciones.

----

a)

$$\left.\begin{array}{r} x = y + z \\ y = \frac{x}{2} + 2z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x - y - z = 0 \\ 2y = x + 4z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x - y - z = 0 \\ x - 2y + 4z = 0 \end{array}\right\}.$$

Por ser $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el número de incógnitas es 3.

Por tratarse de un sistema homogéneo de dos ecuaciones linealmente independientes con tres incógnitas, según el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible indeterminado.

$$\underline{Queda\ probado\ que\ el\ sistema\ tiene\ infinitas\ soluciones.}$$

b)

Parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo $z = \lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = \lambda \\ x - 2y = -4\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x - y = \lambda \\ -x + 2y = 4\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow y = 5\lambda. \quad x = \lambda + 5\lambda = 6\lambda.$$

$$\underline{Solución: \begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 5\lambda, \ \forall\lambda \in R. \\ z = \lambda \end{cases}}$$

****

3º) Quiere diseñarse un envase de helado con forma de prisma regular de base cuadrada y con una capacidad de 80 cm^3. Para elaborar la tapa y la superficie lateral, se usará un determinado material que vale 1 euro/cm^2, pero para la base deberá utilizarse un material que es un 50 % más caro.

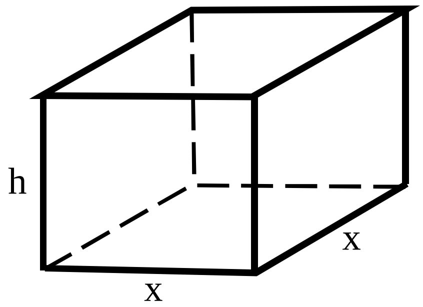
a) Si x es la medida, en cm, del lado de la base, compruebe que la función que determina el precio del envase es $P(x) = 2{,}5x^2 + \frac{320}{x}$.

b) Calcule las medidas que debe tener el envase para que el precio sea el mínimo posible.

----

a)

De la observación de la figura podemos deducir la expresión del volumen, de la cual se expresa la altura en función de x con objeto de expresar el coste como una función de x.



$V = x \cdot x \cdot h = 80 \Rightarrow \boldsymbol{h} = \frac{\mathbf{80}}{\boldsymbol{x^2}}$.

$$Coste = C(x,h) = \overbrace{x^2 \cdot 1{,}5}^{Base} + \overbrace{x^2 \cdot 1}^{Techo} + \overbrace{4 \cdot x \cdot h \cdot 1}^{Pared\ lateral} = 1{,}5x^2 + x^2 + 4x \cdot h =$$

$= 2{,}5x^2 + 4x \cdot h.$ Sustituyendo el valor de h obtenido en el volumen:

$$C(x) = 2{,}5x^2 + 4x \cdot \frac{80}{x^2} = \underline{2{,}5x^2 + \frac{320}{x}}.$$

b)

Es condición necesaria para que el coste sea mínimo que se anule su primera derivada:

$$C'(x) = 5x - \frac{320}{x^2} = \frac{5x^3 - 320}{x^2} = 0 \Rightarrow 5x^3 - 320 = 0; \ x^3 - 64 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4.$$

$\underline{El\ coste\ es\ mínimo\ cuando\ el\ ancho\ de\ la\ base\ es\ de\ 4\ centímetros}.$

El coste mínimo es: $C(4) = 2{,}5 \cdot 4^2 + \frac{320}{4} = 40 + 80 = 120.$

$\underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 120\ euros}.$

****

4º) Sea la función $f(x) = sen\, x$.

a) Calcule la ecuación de las rectas tangentes a la función f en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = \pi$, respectivamente. Encuentre las coordenadas del punto en el que se cortan las dos rectas.

b) Calcule el área de la región limitada por la gráfica de la función f y las rectas tangentes del apartado anterior (en el caso de no haber resuelto el apartado anterior, suponga que las rectas son $y = x$ e $y = -x + \pi$, respectivamente).

----

a)

Los puntos de tangencia son los siguientes:

$f(0) = sen\, 0 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{O(0,0)}$. $\qquad f(\pi) = sen\, \pi = 0 \Rightarrow \boldsymbol{A(\pi,0)}$.

La pendiente de una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = cos\, x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow m_1 = \cos 0 = \mathbf{1} \\ x = \pi \Rightarrow m_2 = \cos \pi = \mathbf{-1} \end{cases}.$$

La recta punto-pendiente tiene por expresión: $y - y_0 = m(x - x_0)$.

$t_1 \Rightarrow y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow \underline{t_1 \equiv y = x}$.

$t_2 \Rightarrow y - 0 = -1 \cdot (x - \pi) \Rightarrow \underline{t_2 \equiv y = -x + \pi}$.

La abscisa del punto de corte de las dos tangentes es la solución de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$\left. \begin{array}{l} y = x \\ y = -x + \pi \end{array} \right\} \Rightarrow x = -x + \pi;\ \ 2x = \pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

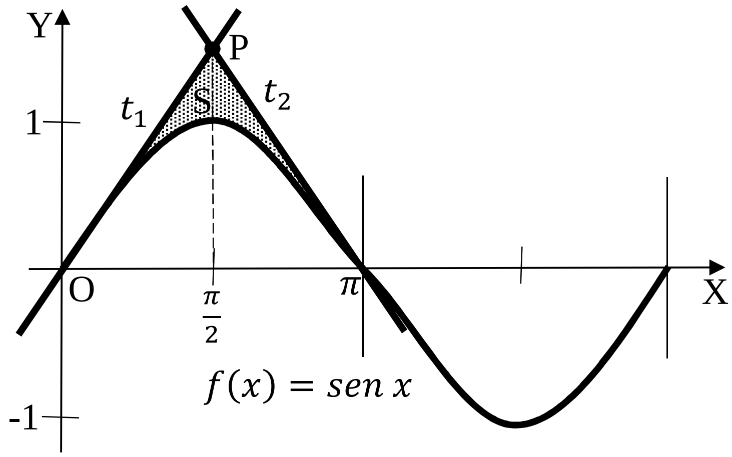
$\underline{Las\ rectas\ tangentes\ se\ cortan\ en\ el\ punto\ P\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}$.

b)

De la observación de la figura adjunta se deduce que, en el intervalo de la superficie a calcular, las ordenadas correspondientes a las tangentes son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función. La superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [t_1 - f(x)] \cdot dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [t_2 - f(x)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - sen\ x) \cdot dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-x + \pi - sen\ x) \cdot dx =$$



$$= \left[\frac{x^2}{2} + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\frac{x^2}{2} + \pi x + \cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \left[\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right] - (0 + \cos 0) + \left(-\frac{\pi^2}{2} + \pi\pi + \cos\pi\right) - \left[-\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + \pi\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right] =$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + 0 - 1 - \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 - 1 + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2} - 0 = \frac{\pi^2}{4} - 2 = \frac{\pi^2 - 8}{4}.$$

$$\underline{S = \frac{\pi^2 - 8}{4}\ u^2 \cong 0{,}467\ u^2.}$$

****

5º) Responda a las siguientes cuestiones:

a) Encuentre la única matriz de la forma $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ a & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ que satisface $A^2 = A$, y compruebe que A y $A - I$ no son invertibles.

b) Justifique razonadamente que si A es una matriz cuadrada de orden n distinta de la matriz nula, O, y de la matriz identidad, I, y satisface la igualdad $A^2 = A$, entonces las matrices A y $A - I$ no son invertibles.

----

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ a & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ a & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{a}{4} & \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\ \frac{a}{2} + \frac{a}{2} & \frac{a}{4} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+a}{4} & \frac{1}{4} \\ a & \frac{1+a}{4} \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = A \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} \frac{1+a}{4} & \frac{1}{4} \\ a & \frac{1+a}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ a & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1.$$

Para $a = 1$ es $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y $A - I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{A\ no\ es\ invertible, c.q.j.}$$

$$|A - I| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{A - I\ no\ es\ invertible, c.q.j.}$$

b)

Si $A^2 = A$ entonces $A^2 - A = 0$, es decir: $A(A - I) = O$.

Ahora vamos a demostrar que ninguna de las dos matrices pueden ser invertibles.

Si A fuera invertible, se cumple que:

$A^{-1} \cdot A \cdot (A - I) = A^{-1} \cdot O \Rightarrow A = I??.$

Si $A - I$ fuera invertible, se cumple que:

$$A \cdot (A - I)(A - I)^{-1} = O \cdot (A - I)^{-1} \ \Rightarrow A = O??.$$

Como se observa, en ambos casos se llega a conclusiones absurdas.

****

6º) Responda a las siguientes cuestiones:

a) Calcule la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por el punto $P(0,0,1)$ y es perpendicular a los planos de ecuaciones $\pi_1 \equiv 3x + y - z = 1$ y $\pi_2 \equiv x + y + 2z = 5$.

b) Suponga que un plano π_1 es perpendicular a un segundo plano π_2 y que el plano π_2 es a su vez perpendicular a un tercer plano π_3. Explique razonadamente si necesariamente los plano π_1 y π_3 deben ser perpendiculares entre ellos.

----

a)

Los vectores normales de los planos dados son $\overrightarrow{v_1} = (3,1,-1)$ y $\overrightarrow{v_2} = (1,1,2)$.

El producto vectorial de dos vectores es perpendicular a cada uno de los vectores que se multiplican:

$$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2i - j + 3k - k + i - 6j = 3i - 7j + 2k.$$

Un vector del plano φ es $\overrightarrow{n_\varphi} = (3,-7,2)$.

La expresión general del plano φ es $\varphi \equiv 3x - 7y + 2z + D = 0$.

Como el plano φ contiene al punto $P(0,0,1)$ tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \varphi \equiv x - 7y + 2z + D = 0 \\ P(0,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 - 0 + 2 + D = 0 \Rightarrow D = -2.$$

$$\underline{\varphi \equiv 3x - 7y + 2z - 2 = 0.}$$

b) Suponga que un plano π_1 es perpendicular a un segundo plano π_2 y que el plano π_2 es a su vez perpendicular a un tercer plano π_3. Explique razonadamente si necesariamente los plano π_1 y π_3 deben ser perpendiculares entre ellos.

Siendo $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$, $\overrightarrow{n_3}$ los vectores normales de los planos π_1, π_2, π_3, respectivamente, y se cumple que $\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0 \\ \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{n_3} = 0 \end{array}\right\}$, se tiene que demostrar si, necesariamente, tiene que cumplirse que $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_3} = 0$.

Utilizando los planos del apartado anterior y llamando: $\pi_1 \equiv 3x + y - z = 1$, $\pi_2 \equiv 3x - 7y + 2z - 2 = 0$ y $\pi_3 \equiv x + y + 2z = 5$, se cumple que:

$\pi_1 \perp \pi_2$ por ser $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = (3,1,-1) \cdot (3,-7,2) = 9 - 7 - 2 = 0$.

$\pi_2 \perp \pi_3$ por ser $\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_3} = (3, -7, 2) \cdot (1, 1, 2) = 3 - 7 + 4 = 0.$

Sin embargo los planos $\pi_1 \ y \ \pi_3$ no son perpendiculares, por ser:

$\pi_1 \perp \pi_3$ por ser $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_3} = (3, 1, -1) \cdot (1, 1, 2) = 3 + 1 - 2 \neq 0.$

Todo lo anterior demuestra que:

$\underline{La\ perpendicularidad\ de\ planos\ no\ cumple\ la\ propiedad\ transitiva}.$

****