# PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

# UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

# SEPTIEMBRE – 2017

MATEMÁTICAS II    Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadoras, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Considere el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ y la recta $r$ que pasa por los puntos $P(0, 0, 6)$ y Q$(1, 2, 3)$.

$a$) Estudie la posición relativa de la recta $r$ y el plano $\pi$.

$b$) Calcule la distancia entre la recta $r$ y el plano $\pi$.
Nota: Puede utilizar la fórmula de la distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano de ecuación $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ como la expresión $d(P_0, \pi) = \frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

----------

$a$)

El vector director de la recta $r$ es $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{PQ} = [Q - P] = (1, 2, -3)$.

El vector normal el plano $\pi$ es $\vec{n} = (1, 1, 1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\vec{n}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes, pero son perpendiculares por ser $\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = (1, 2, -3) \cdot (1, 1, 1) = 1 + 2 - 3 = 0$, por lo cual:

$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ son\ paralelos.}$$

$b$)

La distancia entre la recta $r$ y el plano $\pi$ es la misma que la distancia de cualquier punto de la recta al plano: $d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{1\cdot 0+1\cdot 0+1\cdot 6-1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$.

$$\underline{d(r, \pi) = \frac{5\sqrt{3}}{3}\ unidades.}$$

**********

2º) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$ $y$ $B=\begin{pmatrix}3&4&-1\\-1&-4&3\\0&-4&4\end{pmatrix}$.

$a)$ Compruebe que satisfacen la igualdad $A^2-\frac{1}{2}A\cdot B=I$, donde $I$ es la matriz identidad de orden 3.

$b)$ Utilizando la igualdad anterior, determina la matriz inversa de A: $A^{-1}$.

----------

$a)$

$$A^2-\frac{1}{2}A\cdot B=I;\ \ 2A\cdot A-A\cdot B=2I;\ \ A\cdot(2A-B)=2I;$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\left[2\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&4&-1\\-1&-4&3\\0&-4&4\end{pmatrix}\right]=2I;$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}2&2&2\\0&-4&2\\2&-2&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&4&-1\\-1&-4&3\\0&-4&4\end{pmatrix}\right]=2I;$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&-2&3\\1&0&-1\\2&2&-2\end{pmatrix}=2I;$$

$$\begin{pmatrix}-1+1+2&-2+0+2&3-1-2\\-0-2+2&-0-0+2&0+2-2\\-1-1+2&-2-0+2&3+1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=2I.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ A^2-\frac{1}{2}A\cdot B=I.}$$

$b)$

$A^2-\frac{1}{2}A\cdot B=I$. Multiplicando por la izquierda por $A^{-1}$:

$$A^{-1}\cdot A\cdot A-\frac{1}{2}\cdot A^{-1}A\cdot B=A^{-1}\cdot I;\ \ I\cdot A-\frac{1}{2}\cdot I\cdot B=A^{-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}=A-\frac{1}{2}\cdot B\Rightarrow 2A^{-1}=2A-B=\begin{pmatrix}2&2&2\\0&-4&2\\2&-2&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&4&-1\\-1&-4&3\\0&-4&4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1&-2&3\\1&0&-1\\2&2&-2\end{pmatrix}\Rightarrow\ \underline{A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1&-2&3\\1&0&-1\\2&2&-2\end{pmatrix}}.$$

**********

3º) Considere el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ 2x+ay=2a \end{array}\right\}$.

$a$) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro real $a$.

$b$) Resuelva el sistema para el caso de $a=2$.

----------

$a$)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro $a$ es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \end{vmatrix}=a-2-2+a=0;\ \ 2a-4=0;\ \ a-2=0 \Rightarrow a=2.$$

$$\underline{Para\ a \neq 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2+3+2-6-1-2=-2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M=2;\ \ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b$)

Para $a=2$ el sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ 2x+2y=4 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado.

Despreciando una ecuación, por ejemplo la primera, y haciendo $y=\lambda$:

$$x=2-\lambda;\ \ z=3-x-y=3-2+\lambda-\lambda=1.$$

$$\underline{Solución: x=2-\lambda, y=\lambda, z=1, \forall\lambda \in R.}$$

**********

4º) De las funciones $f(x), f'(x), g(x)$ y $g'(x)$, conocemos los valores siguientes:

| $x$ | $f(x)$ | $f'(x)$ | | $x$ | $g(x)$ | $g'(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 1 | | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | -6 | | 1 | 3 | 3 |

$a$) De la función $f(x)$ se sabe también que la pendiente de la recta tangente en un punto de abscisa $x$ es $4x^3 - 9x^2 - 2x + 1$. Encuentre $f(x)$.

$b$) Calcule: $(g \circ f)'(1)$.

----------

$a$)

La pendiente de la recta tangente en un punto de una función es el valor de su primera derivada en ese punto: $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 - 2x + 1$.

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (4x^3 - 9x^2 - 2x + 1)\,dx = \frac{4x^4}{4} - \frac{9x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + x + C =$$

$$= x^4 - 3x^3 - x^2 + x + C.$$

$$f(0) = 2 \Rightarrow C = 2.$$

$$\underline{f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + x + 2}.$$

$b$)

Según la regla de la cadena de la derivación de la composición de funciones:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] \Rightarrow (g \circ f)'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x).$$

$$(g \circ f)'(1) = g'[f(1)] \cdot f'(1) = g'(0) \cdot (-6) = 1 \cdot (-6) = -6.$$

$$\underline{(g \circ f)'(1) = -6}.$$

**********

5º) En $R^3$, sean la recta $r \equiv \begin{cases} x - z = 2 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$ y el punto $P(0, 1, -1)$.

$a)$ Calcular la ecuación general (es decir, la que tiene de forma $Ax + By + Cz = D$) del plano $\pi$ perpendicular a la recta $r$ y que pasa por el punto P.

$b)$ Calcular el punto simétrico del punto P respecto del plano $\gamma \equiv x + y + z = -3$.

----------

$a)$

Un vector director de una recta dada por la intersección de dos planos es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan

$$\left.\begin{cases} \overrightarrow{n_1} = (1, 0, -1) \\ \overrightarrow{n_2} = (0, 2, 1) \end{cases}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2k + 2i - j = 2i - j + 2k \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (2, -1, 2)$.

Por ser la recta $r$ perpendicular al plano $\pi$, el vector director de la recta es linealmente dependiente del vector normal del plano, por lo cual:

$\pi \equiv 2x - y + 2z + D = 0$.

Para determinar el valor del término independiente D se tiene en cuenta que el plano contiene al punto $P(0, 1, -1)$ tiene que satisfacer su ecuación:

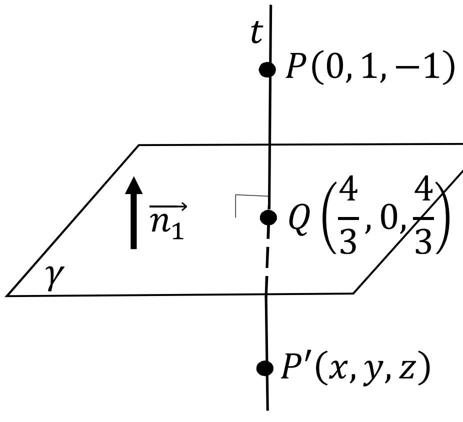
$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 2x - y + 2z + D = 0 \\ P(0, 1, -1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 0 - 1 + 2 \cdot (-1) + D = 0;$$

$-1 - 2 + D = 0 \Rightarrow D = 3$.

$$\underline{\pi \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0}.$$

$b)$

La recta $t$ que pasa por $P(0, 1, -1)$ y es perpendicular al plano $\gamma \equiv x + y + z = -3$ tiene como vector director al vector normal del plano: $\overrightarrow{n_1} = (1, 1, 1)$.




La expresión de $t$ dada por unas ecuaciones paramétricas es $t \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$.

El punto $Q$, intersección del plano $\gamma$ con la recta $t$, es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r}\gamma \equiv x + y + z = -3 \\ t \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda + (1 + \lambda) + (-1 + \lambda) = 3;\ \ 3\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow Q(1, 2, 0)$.

Tiene que cumplirse que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'}$.

$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(1, 2, 0) - (0, 1, -1)] = (1, 1, 1)$.

$\overrightarrow{QP'} = [P' - Q] = [(x, y, z) - (1, 2, 0)] = (x - 1, y - 2, z - 0)$.

$$(1, 1, 1) = (x - 1, y - 2, z - 0) \Rightarrow \left.\begin{cases} x - 1 = 1 \rightarrow x = 2 \\ y - 2 = 1 \rightarrow y = 3 \\ z - 0 = 1 \rightarrow z = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \ \underline{P'(2, 3, 1)}.$$

**********

6º) Sea la función $f(x) = \frac{sen\,x}{cos^2 x}$.

$a$) Calcule la primitiva de la función $f(x)$.

$b$) Calcule el área limitada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$.

----------

$a$)

$$\int f(x) \cdot dx = \int \frac{sen\,x}{cos^2 x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \cos x = t \\ sen\,x \cdot dx = -dt \end{array} \right\} \Rightarrow -\int \frac{1}{t^2} \cdot dt = -\int t^{-2}\,dt =$$

$$= -\frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{t} + C.$$

$$\underline{\int f(x) \cdot dx = \int \frac{sen\,x}{cos^2 x} \cdot dx = \frac{1}{\cos x} + C.}$$

$b$)

En el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ todas las ordenadas de la función $f(x) = \frac{sen\,x}{cos^2 x}$ son positivas, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sen\,x}{cos^2 x} \cdot dx = \left[\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{1}{1} = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 =$$

$$= \sqrt{2} - 1.$$

$$\underline{S = \sqrt{2} - 1\ u^2 \cong 0{,}41\ u^2.}$$

**********