PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2018

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadoras, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Considere la función polinómica $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$.

a) Calcule los valores de los parámetros $a, b\ y\ c$, sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$ y que la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 0$ es la recta $y = x + 3$.

b) Para los valores $a = 2, b = 1\ y\ c = 3$, calcule las abscisas de los extremos relativos de la función y clasifíquelos.

----

a)

Por tener un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 1$ es $f'(1) = 0$:

$f'(x) = 3x^2 - 2ax + b$.

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 - 2a \cdot 1 + b = 0;\ -2a + b = -3.$ (1)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

La pendiente de la recta $y = x + 3$ es $m = 1$.

Lo anterior implica que $f'(0) = 1$:

$m = f'(0) = 3x^2 - 2ax + b = 1 \Rightarrow \underline{b = 1}$.

Sustituyendo en (1) el valor de b:

$-2a + 1 = -3;\ -2a = -4 \Rightarrow \underline{a = 2}$.

La función resulta $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + c$.

El punto de tangencia es $T(0,3)$, por lo cual es $f(0) = 3$:

$f(0) = 3 \Rightarrow \underline{c = 3}$.

$b)$

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3.$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$. $\qquad f''(x) = 6x - 4$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0;\ \ x = x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 2}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 1.$

$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{3} - 4 = 2 - 4 = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = \frac{1}{3}.$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 3 = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + 3 = \frac{1-6+9+81}{27} = \frac{85}{27} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{Máximo: P\left(\frac{1}{3}, \frac{85}{27}\right)}.$

$f''(1) = 6 \cdot 1 - 4 = 6 - 4 = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 1.$

$f(1) = 0 \Rightarrow 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 + 3 = 3 \Rightarrow \underline{Mínimo: Q(1,3)}.$

****

2º) Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ 2x+ay=2a \end{cases}$, que depende del parámetro real a:

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema para el caso de $a=1$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \end{vmatrix}=a-2-2+a=2a-4=0;\ \ a-2=0 \Rightarrow a=2.$$

$$\underline{Para\ a \neq 2 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}=-4+2+6-4=0 \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=2 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

b)

Para $a=1$ el sistema resulta $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ 2x+y=2 \end{cases}$, que es compatible determinado.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{2 \cdot 1-4}=\frac{1-2-2+3}{-2}=\frac{0}{-2}=0.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{2-6-2+2}{-2}=\frac{-4}{-2}=2.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2+3+2-6-1-2}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

$$\underline{Solución: x = 0,\ y = 2,\ z = 1}.$$

****

3º) Considere el plano que pasa por el punto $A(1,0,3)$ y tiene como vectores directores $\vec{u}=(-1,3,2)$ y $\vec{v}=(2,1,0)$.

$a)$ Calcule la ecuación de la recta que es perpendicular al plano y pasa por el punto A.

$b)$ Calcule la distancia del punto $P(1,5,0)$ al plano.
Nota: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas $P_0(x_0,y_0,z_0)$ al plano de ecuación $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ con la expresión $d(P_0,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

$a)$

Un vector normal del plano es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de sus vectores directores.

$$\overrightarrow{n'}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=4j-k-6k-2i=-2i+4j-7k \Rightarrow$$

$\Rightarrow \vec{n}=(2,-4,7).$

El vector normal del plano es el vector director de la recta pedida, cuya expresión dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $\underline{r \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-4\lambda \\ z=2+7\lambda \end{cases}}$.

$b)$

La ecuación general del plano es: $\pi(A;\ \vec{u},\vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0;$

$4y-(z-3)-6(z-3)-2(x-1)=0;\ \ -2(x-1)+4y-7(z-3)=0;$

$-2x+2+4y-7z+21=0 \Rightarrow\ \pi \equiv 2x-4y+7z-23=0.$

Aplicando la fórmula recomendada al plano $\pi \equiv 2x-4y+7z-23=0$ y al punto $P(1,5,0)$:

$$d(P,\pi)=\frac{|2\cdot 1-4\cdot 5+7\cdot 0-23|}{\sqrt{2^2+(-4)^2+7^2}}=\frac{|2-20-23|}{\sqrt{4+16+49}}=\frac{|-41|}{\sqrt{69}}=\frac{41\cdot\sqrt{69}}{69}.$$

$$\underline{d(P,\pi)=\frac{41\cdot\sqrt{69}}{69}\ unidades.}$$

****

4º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

$a)$ ¿Hay algún valor de $a \in R$ tal que A no tiene inversa para este valor?

$b)$ Calcule la matriz inversa de A^2 para $a = 0$.

$a)$

Una matriz no es invertible (no tiene inversa) cuando su determinante es cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 - 1 = 0;\ \ a^2 + 1 = 0.$$

Teniendo en cuenta que $a^2 + 1 \neq 0, \forall a \in R$:

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ para\ cualquier\ valor\ real\ de\ a.}$$

$b)$

Para $a = 0$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se obtiene la inversa por el método de Gauss-Jordan:

$$(A^2|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 + 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 4F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to F_3 + F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \to F_2 + F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow\ \underline{(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

****

5º) Considere los puntos del espacio tridimensional $A(1,1,0), B(3,5,0)\ y\ C(1,0,0)$ y la recta $r \equiv x = y - 1 = \frac{z}{2}$.

a) Encuentre el punto de intersección de la recta r con el plano que pasa por los puntos A, B y C.

b) Encuentre los puntos de la recta r para los cuales el tetraedro de vértices P, A, B y C tiene un volumen de 2 u^3.
Nota: El volumen de un tetraedro de vértices P, Q, R y S viene dado por la siguiente expresión: $V = \frac{1}{6} \cdot \left|det\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}\right)\right|$.

----

a)

Los puntos A, B y C determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(3,5,0) - (1,1,0)] = (2,4,0)$.

$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(1,0,0) - (1,1,0)] = (0,-1,0)$.

La ecuación general del plano π que determinan los puntos A, B y C tiene la siguiente expresión general:

$$\pi\left(C;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ -2z = 0 \Rightarrow \pi \equiv z = 0.$$

El punto de intersección del plano y la recta es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} z = 0 \\ r \equiv x = y - 1 = \frac{z}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0, y = 1\ \Rightarrow\ \underline{M(0,1,0)}.$$

b)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$.

Los puntos de r tiene por expresión $P(\lambda, 1 + \lambda, 2\lambda)$.

$\overrightarrow{AP} = [P - A] = [(\lambda, 1 + \lambda, 2\lambda) - (1,1,0)] = (\lambda - 1, \lambda, 2\lambda)$.

Aplicando la fórmula recomendada: $V = \frac{1}{6} \cdot \left|det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}\right)\right| = 2;$

$$\left|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}\right| = 12;\ \left\|\begin{matrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \lambda - 1 & \lambda & 2\lambda \end{matrix}\right\| = |-4\lambda| = 12;\ |4\lambda| = 12 \Rightarrow |\lambda| = 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ \lambda_1 = 3\ \Rightarrow\ \underline{P_1(3, 4, 6)}.\qquad \lambda_2 = -3\ \Rightarrow\ \underline{P_2(-3, -2, -6)}.$

****

6º) Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3 - x^2$.

$a)$ Haga un esbozo de las gráficas de las parábolas $f(x)$ y $g(x)$ en un mismo sistema de ejes cartesianos y encuentre los puntos de corte con el eje de las abscisas, los vértices y los puntos de corte entre las dos gráficas.

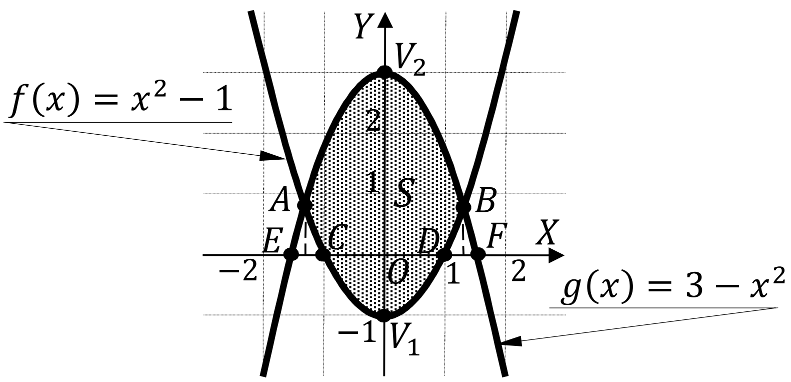
$b)$ Calcule el área de la región del semiplano $y \geq 0$ comprendido entre las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Las abscisas de los puntos de intersección de las curvas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 - 1 = 3 - x^2;\ 2x^2 = 4;\ x^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} \to A\left(-\sqrt{2}, 1\right) \\ x_2 = \sqrt{2} \to B\left(\sqrt{2}, 1\right) \end{cases}.$$

La parábola $f(x) = x^2 - 1$, que es convexa $(\cup)$ por ser positivo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el punto $V_1(-1, 0)$ y corta al eje de abscisas en los puntos $C(-1, 0)\ y\ D(1, 0)$.

La parábola $y = 3 - x^2$, que es cóncava $(\cap)$ por ser negativo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el punto $V_2(0, 3)$ y corta al eje de abscisas en los puntos $E\left(-\sqrt{3}, 0\right)\ y\ F\left(\sqrt{3}, 0\right)$



La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.

Por ser las ordenadas de la parábola de ecuación $g(x) = 3 - x^2$ iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función $f(x) = x^2 - 1$ en el intervalo del área a calcular y, además, considerando que las dos funciones son pares y, en consecuencia, simétricas con respecto al eje de ordenadas, la superficie S a calcular es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{2}} [(3 - x^2) - (x^2 - 1)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{2}} (3 - x^2 - x^2 + 1) \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^{\sqrt{2}} (4 - 2x^2) \cdot dx = 2 \cdot \left[4x - \frac{2x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} = 2 \cdot \left[4 \cdot \sqrt{2} - \frac{2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^3}{3}\right] - 2 \cdot 0 =$$

$$= 8\sqrt{2} - \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{3} = 8\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 8\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{16\sqrt{2}}{3}\ u^2 \cong 7{,}54\ u^2.}$$

****