PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

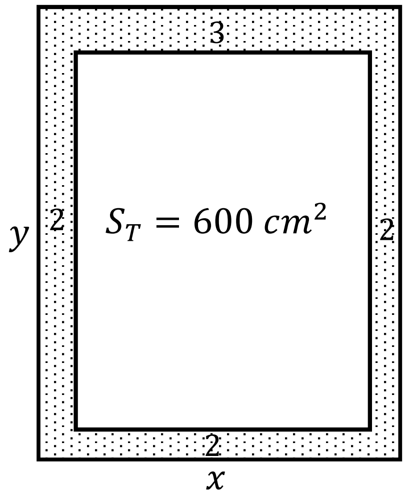
UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

JUNIO – 2019

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadoras, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Las páginas de un libro deben tener 600 cm^2 de superficie total cada una, con unos márgenes alrededor del texto de 2 cm en la parte inferior, 3 cm en la parte superior y 2 cm a cada lado. Calcula las dimensiones de la página que permite la superficie más grande posible.



La superficie de la página es $S_t = x \cdot y = 600\ cm^2$.

De la superficie total se deduce que $y = \frac{600}{x}$.

De la observación de la figura se deduce la superficie a imprimir (blanca) y que tiene que ser lo máxima posible; es la siguiente:

$$s = (x-4)(y-5) = xy - 5x - 4y + 20.$$

Sustituyendo el valor de $y = \frac{600}{x}$:

$$s(x) = x \cdot \frac{600}{x} - 5x - 4 \cdot \frac{600}{x} + 20 = 620 - 5x - \frac{2.400}{x} = \frac{-5x^2+620x-2.400}{x} =$$

$$= -\frac{1}{5} \cdot \frac{x^2-124x+480}{x}.$$

Para que la superficie a imprimir sea máxima es necesario que se anule su primera derivada y sea negativa su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$s'(x) = -\frac{1}{5} \cdot \frac{(2x-124)\cdot x-(x^2-124x+480)\cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{2x^2-124x-x^2+124x-480}{x^2} =$$

$$= -\frac{1}{5} \cdot \frac{x^2-480}{x^2}.$$

$s'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{5} \cdot \frac{x^2-480}{x^2} = 0;\ \ x^2 - 480 = 0;\ \ x = \pm\sqrt{480} = \pm 4\sqrt{30}.$

La raíz negativa carece de sentido lógico, por lo cual $x = 4\sqrt{30} \cong 21{,}91$.

$y = \frac{600}{x} = \frac{600}{4\sqrt{30}} = \frac{150}{\sqrt{30}} = \frac{150\sqrt{30}}{30} = 5\sqrt{30} \cong 27{,}39.$

$\underline{La\ superficie\ de\ la\ página\ es\ 21{,}91\ cm\ de\ base\ y\ 27{,}39\ cm\ de\ altura.}$

Justificación de que el valor hallado de x es un máximo.

$s''(x) = -\frac{1}{5} \cdot \frac{2x \cdot x^2 - (x^2-480) \cdot 2x}{x^4} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{2x^2 - 2 \cdot (x^2-480)}{x^3} = -\frac{2}{5} \cdot \frac{x^2 - x^2 + 480}{x^3} =$

$= -\frac{2}{5} \cdot \frac{480}{x^3} = -\frac{192}{x^3}.$

$s''\left(4\sqrt{30}\right) = -\frac{192}{\left(4\sqrt{30}\right)^3} < 0 \Rightarrow \underline{Máximo, como\ se\ quería\ justificar.}$

****

2º) Considere el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+3y+2z=-1 \\ x+k^2y+3z=2k \\ 3x+7y+7z=k-3 \end{cases}$, que depende del parámetro k.

$a)$ Discute el sistema para los diferentes valores del parámetro k.

$b)$ Resuelve el sistema para el caso de $k=-1$.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & k^2 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & k^2 & 3 & 2k \\ 3 & 7 & 7 & k-3 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & k^2 & 3 \\ 3 & 7 & 7 \end{vmatrix}=7k^2+14+27-6k^2-21-21=k^2-1=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow k_1=-1, k_2=1.$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} k \neq -1 \\ k \neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ k=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & 7 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1-C_3=C_4\} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ k=-1 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ k=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 7 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & -2 \end{vmatrix}=-2-7+18+3-14+6=4 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ m=1 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b)$

Para $k=-1$ el sistema resulta:

$\left.\begin{array}{r} x+3y+2z=-1 \\ x+y+3z=-2 \\ 3x+7y+7z=-4 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado. Despreciando una de las ecuaciones (tercera) y haciendo $z=\lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y=-1-2\lambda \\ x+y=-2-3\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+3y=-1-2\lambda \\ -x-y=2+3\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=1+\lambda;\ \ y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda.$$

$$x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda=-2-3\lambda;\ \ x=-\frac{5}{2}-\frac{7}{2}\lambda.$$

$$\underline{Solución: x=-\frac{5}{2}-\frac{7}{2}\lambda,\ y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda,\ z=\lambda,\ \forall\lambda\in R.}$$

****

3º) Un dron se encuentra en el punto $P(2,-3,1)$ y queremos dirigirlo en línea recta hasta el punto más próximo del plano de ecuación $\pi \equiv 3x+4z+15=0$.

a) Calcula la ecuación de la recta, en forma de paramétricas, que tiene que seguir el dron. ¿Qué distancia tiene que recorrer hasta llegar al plano?

b) Encuentra las coordenadas del punto del plano donde llegará el dron.

----

a)

Un vector normal del plano π es $\vec{n}=(3,0,4)$.

La ecuación de la recta r, que es la dirección del dron, es la siguiente:

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=-3 \\ z=1+4\lambda \end{cases}}.$$

La distancia a recorrer por el dron es la distancia del punto P al plano π.

La distancia del punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ al plano $Ax+By+Cz+D=0$ viene dada por la fórmula $d(P_0,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Aplicando la fórmula al punto $P(2,-3,1)$ y al planos $\pi \equiv 3x+4z+15=0$:

$$d(P,\pi)=\frac{|3\cdot 2+4\cdot 1+15|}{\sqrt{3^2+0^2+4^2}}=\frac{|6+4+15|}{\sqrt{9+16}}=\frac{25}{\sqrt{25}}=\frac{25}{5}=5.$$

$$\underline{La\ distancia\ del\ dron\ al\ plano\ \pi\ es\ de\ 5\ unidades.}$$

b)

El punto del plano donde llegará el dron es la intersección del plano π con la recta r:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 3x+4z+15=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=-3 \\ z=1+4\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 3(2+3\lambda)+4(1+4\lambda)+15=0;$$

$6+9\lambda+4+16\lambda+15=0;\ \ 25+25\lambda=0;\ \ 1+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-1.$

$$\left.\begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=-3 \\ z=1+4\lambda \end{cases}\right\} \Rightarrow \lambda=-1 \ \Rightarrow Q(-1,-3,-3).$$

$$\underline{El\ dron\ llega\ al\ punto\ Q(-1,-1,-3)\ del\ plano\ \pi.}$$

****

4º) Considera la función $f(x)=\frac{2x^3-5x+4}{1-x}$.

a) Calcula el dominio y estudia la continuidad de f. ¿Tiene asíntota vertical?

b) Observa que $f(-2)=\frac{-2}{3}, f(0)=4\ y\ f(2)=-10$. Razona si, a partir de esta información, podemos deducir que el intervalo $(-2,0)$ contiene un cero de la función. ¿Podemos deducirlo para el intervalo $(0,2)$? Encuentra un intervalo determinado por dos enteros consecutivos que contenga, como mínimo, un cero de esta función.

----

a)

El dominio de una función racional es el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$1-x=0 \Rightarrow x=1 \ \Rightarrow \ \underline{D(f) \Rightarrow R-\{1\}}.$$

La función $f(x)$ es continua en su dominio, por ser cociente de dos funciones polinómicas.

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ contua\ en\ su\ dominio}.$$

La única asíntota vertical posible es para $x=1$:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-5x+4}{1-x}=\frac{2\cdot 1-5\cdot 1+4}{1-1}=\frac{2-5+4}{0}=\frac{1}{0}=\infty.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ tiene\ como\ asíntota\ verticla\ a\ la\ recta\ x=1}.$$

b)

Del apartado anterior se deduce que la función es continua en el intervalo $(-2,0)$, por lo cual, según el teorema de Bolzano, que dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que $f(c)=0$".

Según el teorema de Bolzano y con la información aportada se puede inferir que:

$$\underline{La\ función\ f(x)\ tiene\ al\ menos\ un\ cero\ en\ el\ intervalo\ (-2,0)}.$$

En el intervalo $(0,2)$ no se puede asegurar que la función $f(x)$ tenga algún cero debido a que la función no es continua en este intervalo.

Considerando la continuidad del intervalo $(-2,0)$, se puede considerar el intervalo $(-2,-1)$, donde la función $f(x)$ es continua; se tiene que: $f(-2)=\frac{-2}{3}$ y

$$f(-1) = \frac{2\cdot(-1)^3 - 5\cdot(-1) + 4}{1-(-1)} = \frac{-2+5+4}{1+1} = \frac{7}{2} > 0.$$

Según lo anterior y teniendo en cuenta de nuevo el teorema de Bolzano, se puede asegurar que:

$$\underline{La\ función\ f(x)\ tiene\ al\ menos\ un\ cero\ en\ el\ intervao\ (-2, -1)}.$$

****

5º) Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Calcula para qué valores del parámetro a se satisface la igualdad $M^2 - M - 2I = O$, donde I es la matriz identidad y O es la matriz nula, ambas de orden 2.

b) A partir de la igualdad del apartado anterior, encuentra una expresión general para calcular la matriz inversa de M y, a continuación, calcula la inversa de M para el caso de $a = \sqrt{2}$.

----

a)

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + a^2 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}.$$

$$M^2 - M - 2I = O \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 + a^2 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a^2 - 2 & 0 \\ 0 & a^2 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a^2 - 2 = 0 \Rightarrow \underline{a = \pm\sqrt{2}}.$$

b)

Por definición de matriz inversa sabemos que $M \cdot M^{-1} = I$:

$$M^2 - M - 2I = O;\ \ M \cdot (M - I) = 2I;\ M \cdot \frac{1}{2}(M - I) = I;$$

$$M \cdot \left[\frac{1}{2}(M - I)\right] = I \Rightarrow \underline{M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I)}.$$

Para $a = \sqrt{2} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.$

$$\underline{M^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.}$$

****

6º) Considera las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, y la recta $x = e$.

a) Haz un esbozo de la región delimitada por sus gráficas y el eje de abscisas. Calcula el punto de corte de $y = f(x)$ con $y = g(x)$.

b) Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior.

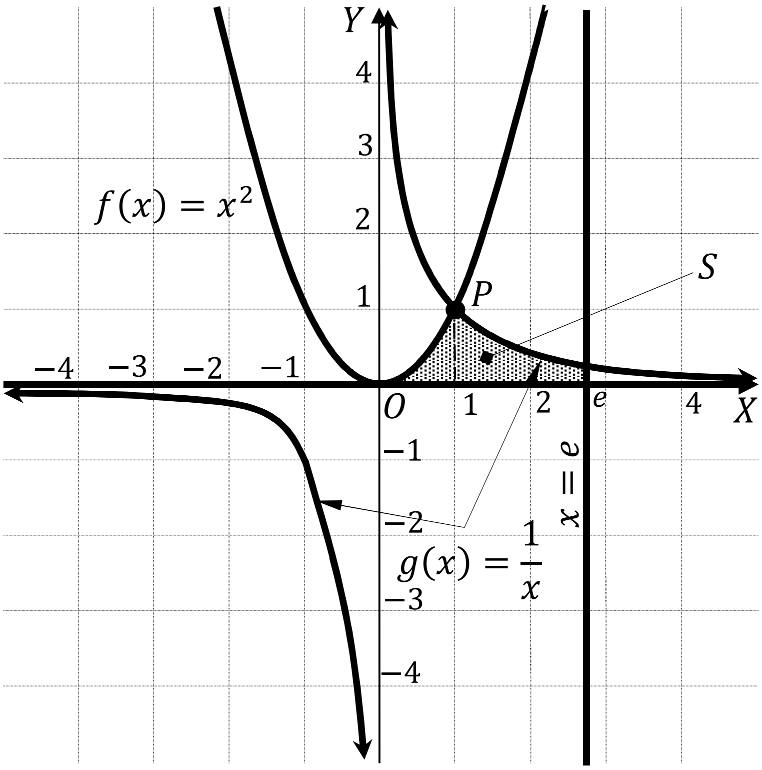
----

a)

Las abscisas de los puntos de corte de ambas funciones son las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 = \frac{1}{x};\ \ x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \underline{P(1,1)}.$$

La representación gráfica, aproximada, de la situación, es la que aparece en la figura adjunta.



b)

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es:

$$S = \int_0^1 f(x) \cdot dx + \int_1^e g(x) \cdot dx = \int_0^1 x^2 \cdot dx + \int_1^e \frac{1}{x} \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + [Lx]_1^e = \frac{1^3}{3} - 0 + Le - L0 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{4}{3}\ u^2.}$$

****