PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2019

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadoras, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Considere las rectas $y = x$ e $y = 2x$, y la parábola $y = x^2$.

a) Calcule los puntos de intersección entre las gráficas de las diferentes funciones y haz un esbozo de la región delimitada por estas gráficas.

b) Calcule el área de la región plana del apartado anterior.

----

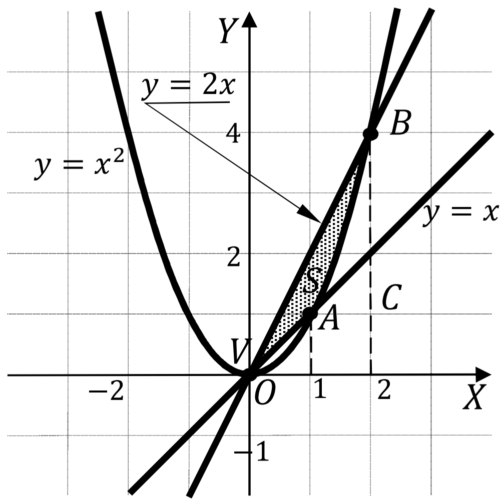
a)

Las rectas $y = x$ e $y = 2x$ se cortan en el origen de coordenadas.

Los puntos de corte de cada una de las rectas con la parábola son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} y = x \\ y = x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x = x^2;\ \ x^2 - x = 0;.$$

$$x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow O(0,0) \\ x_2 = 1 \rightarrow A(1,1) \end{cases}.$$



$$\left.\begin{array}{l} y = 2x \\ y = x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = x^2;\ \ x^2 - 2x = 0;$$

$$x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow O(0,0) \\ x_2 = 2 \rightarrow B(2,4) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación se indica en la figura adjunta.

b)

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S=\int_0^1(2x-x)\cdot dx+\int_1^2(2x-x^2)\cdot dx=\int_0^1 x\cdot dx+\int_1^2(2x-x^2)\cdot dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{2x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\left(\frac{1^2}{2}-0\right)+\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{1}{2}+\left[\left(2^2-\frac{2^3}{3}\right)-\left(1^2-\frac{1^3}{3}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}+4-\frac{8}{3}-1+\frac{1}{3}=3+\frac{1}{2}-\frac{7}{3}=\frac{18+3-14}{6}=\frac{7}{6}.$$

$$\underline{S=\frac{7}{6}\,u^2\cong 1{,}17\,u^2.}$$

****

2º) Considere la matriz $M=\begin{pmatrix}1 & 0 & a-1\\ 1 & a & 1\\ 4 & 3a & 1\end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Hallar los valores reales del parámetro real a para los que la matriz M es invertible.

b) Discute la posición relativa de los planos $\pi_1 \equiv x+(a-1)z=0, \pi_2 \equiv x+ay+z=1$ y $\pi_3 \equiv 4x+3ay+z=3$ en función de los valores del parámetro a.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|M|=\begin{vmatrix}1 & 0 & a-1\\ 1 & a & 1\\ 4 & 3a & 1\end{vmatrix}=a+3a(a-1)-4a(a-1)-3a=$$

$$=-2a-a(a-1)=0;\ \ 2a+a(a-1)=0;\ \ 2a+a^2-a=0;\ \ a^2+a=0;$$

$$a(a+1)=0 \Rightarrow a_1=0, a_2=-1.$$

$$\underline{M\ es\ invertible\ \forall a \in R-\{-1,0\}}.$$

b)

Los planos $\pi_1 \equiv x+(a-1)z=0, \pi_2 \equiv x+ay+z=1$ y $\pi_3 \equiv 4x+3ay+z=3$ determinan el sistema $\left.\begin{array}{r}x+(a-1)z=0\\ x+ay+z=1\\ 4x+3ay+z=3\end{array}\right\}$, cuyas matrices de coeficientes y ampliada son $M=\begin{pmatrix}1 & 0 & a-1\\ 1 & a & 1\\ 4 & 3a & 1\end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix}1 & 0 & a-1 & 0\\ 1 & a & 1 & 1\\ 4 & 3a & 1 & 3\end{pmatrix}$.

Nótese que la matriz M es la misma del apartado anterior.

Según que los rangos de estas matrices, la posición relativa de los planos son las siguientes:

1º. -- $Rang\ M=Rang\ M'=3 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ un\ punto.$

2º. -- $Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Los\ planos\ son\ secantes\ dos\ a\ dos.$

3º. -- $Rang\ M=Rang\ M'=2 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta.$

4º. -- $Rang\ M=1;\ Rang\ M'=2 \Rightarrow Los\ planos\ son\ paralelos.$

5º. -- $Rang\ M=Rang\ M'=1 \Rightarrow Los\ planos\ son\ coincidentes.$

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{vmatrix} = a(a+1) = 0 \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = -1.$$

$$\underline{Si\ \begin{Bmatrix} a \neq 0 \\ a \neq -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ un\ punto.}$$

$$Para\ a = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 - 1 + 3 = 1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Si\ a = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2, Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ son\ secantes\ dos\ a\ dos.}$$

$$Para\ a = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2 = -C_4\} \Rightarrow Rang\ M' = 2$$

$$\underline{Si\ a = -1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta.}$$

****

3º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $A \cdot B$ y $B \cdot A$.

b) Justifique que si el producto de dos matrices cuadradas no nulas tiene por resultado la matriz nula, entonces el determinante de ambas matrices debe ser cero.

----

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}}.$$

b)

Sean las matrices A y B, y suponemos que, por ejemplo, $|B| \neq 0$, lo que implica que la matriz B no es nula y tiene inversa.

Siendo $A \cdot B = O$ (matriz nula), se pueden multiplicar los dos términos por la derecha por B^{-1}, que existe, resultando:

$A \cdot B \cdot B^{-1} = O \cdot B^{-1} = O \Rightarrow A = 0$, lo cual contradice que las dos matrices son cuadradas y no nulas.

Por lo anterior se concluye que:

$$\underline{A \cdot B = O \Rightarrow |A| \neq 0 \ y \ |B| \neq 0, como\ queríamos\ justificar.}$$

****

4º) Considera la función $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica en aquellos puntos en la recta tangente es horizontal.

b) Calcule las coordenadas del punto de la gráfica de la función $f(x)$ en que la pendiente de la recta tangente es máxima.

----

a)

Si la recta tangente es horizontal su pendiente es $m=0$.

El valor de la pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$m=f'(x)=\frac{-1\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

$$m=0 \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-2x}{(1+x^2)^2}=0;\ -2x=0 \Rightarrow x=0.$$

$f(0)=\frac{1}{1+0^2}=\frac{1}{1}=1 \Rightarrow$ Punto de tangencia $\Rightarrow P(0,1)$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y-y_0=m(x-x_0)$, que aplicada al punto $P(0,1)$ con $m=0$ es:

$$y-1=0\cdot(x-0)=0.$$

$$\underline{La\ recta\ tangente\ pedida\ es\ t\equiv y-1=0}.$$

b)

Una función tiene un máximo cuando se anula su primera derivada y es negativa su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

La primera derivada de $f'(x)$ es $f''(x)$.

$$f''(x)=\frac{-2\cdot(1+x^2)^2-(-2x)\cdot[2\cdot(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4}=\frac{-2\cdot(1+x^2)+8x^2}{(1+x^2)^3}=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}=\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}.$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}=0;\ 3x^2-1=0;\ \ x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

La segunda derivada de $f'(x)$ es $f'''(x)$.

$$f'''(x)=\frac{6x\cdot(1+x^2)^3-(6x^2-2)\cdot[3\cdot(1+x^2)^2\cdot 2x]}{(1+x^2)^6}=\frac{6x\cdot(1+x^2)-(6x^2-2)\cdot 6x}{(1+x^2)^4}=$$

$$= \frac{6x\cdot(1+x^2-6x^2+2)}{(1+x^2)^4} = \frac{6x\cdot(3+5x^2)}{(1+x^2)^4}.$$

$$f'''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{6\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\left(3+5\cdot\frac{1}{3}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^4} > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$f'''\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{6\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\left(3+5\cdot\frac{1}{3}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^4} < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}.$$

$$\underline{El\ punto\ pedido\ es\ Q\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right).}$$

****

5º) Sean P, Q y R los puntos de intersección del plano $\pi \equiv x + 4y + 2z = 4$ con los ejes de coordenadas OX, OY y OZ, respectivamente.

a) Calcule los puntos P, Q y R y el perímetro del triángulo de vértices P, Q y R.

b) Calcule al área del triángulo de vértices P, Q y R.
Nota: Para el cálculo del área del triángulo definido por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ puede utilizarse la fórmula $S = \frac{1}{2} \cdot \|\vec{v} \times \vec{w}\|$, donde $\vec{v} \times \vec{w}$ es el producto vectorial de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

----

a)

$$\pi \equiv x + 4y + 2z = 4 \Rightarrow \begin{cases} OX \Rightarrow \begin{Bmatrix} y = 0 \\ z = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \underline{P(4,0,0)} \\ OY \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = 0 \\ z = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow 4y = 4 \Rightarrow \underline{Q(0,1,0)} \\ OZ \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow 2z = 4 \Rightarrow \underline{R(0,0,2)} \end{cases}.$$

$$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(0,1,0) - (4,0,0)] = (-4,1,0).$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}.$$

$$\overrightarrow{PR} = [R - P] = [(0,0,2) - (4,0,0)] = (-4,0,2).$$

$$\overline{PR} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}.$$

$$\overrightarrow{QR} = [R - Q] = [(0,0,2) - (0,1,0)] = (0,-1,2).$$

$$\overline{QR} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}.$$

$$\underline{Perímetro = p = \left(\sqrt{17} + \sqrt{20} + \sqrt{5}\right) u \cong 10{,}831\, u.}$$

b)

$$S_{PQR} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |2i + 4k + 8j| =$$

$$= |i + 4j + 2k| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 16 + 4} = \sqrt{21}.$$

$$\underline{S_{PQR} = \sqrt{21}\, u^2 \cong 4{,}583\, u^2.}$$

****

6º) Considera la función $f(x)=\frac{Lx}{x}$.

$a)$ Calcule el dominio de la función f, los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

$b)$ Calcula el área de la región del plano determinada por la gráfica de la función f, las rectas $x=1\ y\ x=e$, y el eje de abscisas.

$a)$

Sabiendo que los números negativos no tienen logaritmo: $\underline{D(f)\Rightarrow(0,+\infty)}$.

Del dominio de la función se deduce que $\underline{la\ función\ f\ no\ corta\ al\ eje\ Y}$.

$Eje\ X\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow Lx=0\Rightarrow x=1\Rightarrow \underline{P(1,0)}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente: $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-Lx\cdot 1}{x^2}=\frac{1-Lx}{x^2}$.

Por ser $x^2>0, \forall x\in D(f)$, la derivada es positiva o negativa cuando lo sea el numerador $1-Lx$: $1-Lx=0\Rightarrow x=e$.

$$\underline{Crecimiento: f'(x)>0\Rightarrow x<e.}$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x)<0\Rightarrow x>e.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{Lx}{x}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0.$$

De lo anterior se deduce que el eje X es asíntota horizontal de la función.

$b)$

Teniendo en cuenta que la función corta al eje de abscisas en el punto $P(1,0)$ y que la función es creciente en el intervalo $(1,e)$, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S=\int_1^e f(x)\cdot dx=\int_1^e\frac{Lx}{x}\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} Lx=t \\ \frac{1}{x}\cdot dx=dt\end{array}\middle| \begin{array}{c} x=e\to t=1 \\ x=1\to t=0\end{array}\right\}\Rightarrow\int_0^1 t\cdot dt=$$

$$=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{1^2}{2}-0=\frac{1}{2}.$$

$$\underline{S=\frac{1}{2}\ u^2.}$$

****