PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

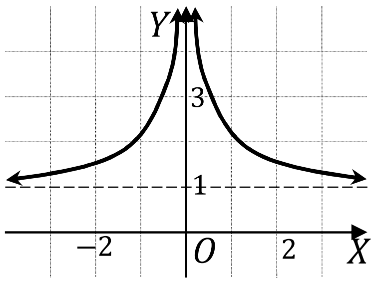
UNIVERSIDAD DE CATALUÑA

JULIO – 2020

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responde a cuatro de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre que desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

1º) Trace la recta tangente a la función $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ por un punto $P[a, f(a)]$ del primer cuadrante. Esta recta forma un triángulo con los ejes de coordenadas.



a) Comprueba que el área de ese triángulo, en función de a, viene dada por la función $g(x) = \frac{(a^2+3)^2}{4a}$.

b)

¿En qué punto P el área del triángulo es mínima? Calcule esta área mínima.

----

a)

La expresión del punto es $P\left(a, \frac{a^2+1}{a^2}\right)$.

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot 2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}. \qquad m = f'(a) = -\frac{2}{a^3}.$$

La ecuación de la recta punto-pendiente es $y - y_0 = m \cdot (x - x_o)$:

$$y - \frac{a^2+1}{a^2} = -\frac{2}{a^3} \cdot (x - a); \;\; a^3y - a^3 - a = -2x + 2a;$$

$$2x + a^3y - a^3 - a - 2a \Rightarrow t \equiv 2x + a^3y - a(a^2 + 3) = 0.$$

Los puntos de corte con los ejes de la recta t son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 2x = a(a^2 + 3); \;\; x = \frac{a(a^2+3)}{2} \Rightarrow M\left[\frac{a(a^2+3)}{2}, 0\right].$$

$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow a^3 y - a(a^2+3) = 0;\ \ y = \frac{a^3+3}{a^2} \Rightarrow N\left(0, \frac{a^3+3}{a^2}\right).$

Por tratarse de un triángulo rectángulo, su área es la mitad del producto de sus catetos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{a(a^2+3)}{2} \cdot \frac{a^3+3}{a^2} = \frac{(a^2+3)^2}{4a}.$$

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ el\ \text{á}rea\ del\ tri\text{á}ngulo\ es\ g(a) = \frac{(a^2+3)^2}{4a}}.$

$b)$

El área será mínima cuando su primera derivada sea nula y sea positiva su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$g'(a) = \frac{[2\cdot(a^2+3)\cdot 2a]\cdot 4a - (a^2+3)^2\cdot 4}{16a^2} = \frac{(a^2+3)\cdot(4a^2-a^2-3)}{4a^2} = \frac{3(a^2+3)\cdot(a^2-1)}{4a^2}.$$

$$g'(a) = 0 \Rightarrow \frac{3(a^2+3)\cdot(a^2-1)}{4a^2} = 0;\ \ a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a_1 = -1, a_2 = 1.$$

La solución negativa carece de sentido lógico (par máximo).

Justificación de que se trata de un mínimo para $a = 1$:

$$g'(a) = \frac{3}{4} \cdot \frac{(a^2+3)\cdot(a^2-1)}{a^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a^4-a^2+3a^2-3}{a^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a^4+2a^2-3}{a^2}.$$

$$g''(a) = \frac{3}{4} \cdot \frac{(4a^3+4a)\cdot a^2 - (a^4+2a^2-3)\cdot 2a}{a^4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4a^4+4a^2-2a^4-4a^2+6}{a^3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2a^4+6}{a^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g''(a) = \frac{3}{2} \cdot \frac{a^4+3}{a^3}. \qquad g''(1) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1^4+3}{1^3} = 6 > 0 \Rightarrow M\text{í}nimo\ para\ x = 1, c.q.j.$$

La solución es $a = 1 \Rightarrow P\left(a, \frac{a^2+1}{a^2}\right) \Rightarrow P\left(1, \frac{1^2+1}{1^2}\right).$

$\underline{El\ punto\ pedido\ es\ P(1,2)}.$

$$g(1) = \frac{(1^2+3)^2}{4\cdot 1} = \frac{4^2}{4} = 4.$$

$\underline{El\ \text{á}rea\ m\text{á}xima\ es\ de\ 4\ a^2}.$

****

2º) Considere el sistema $\left.\begin{array}{r} 5x+y+4z=19 \\ kx+2y+8z=28 \\ 5x+y-kz=23+k \end{array}\right\}$, dependiente del parámetro k.

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k.

b) Resuelve, si es posible, el sistema para el caso de $k=0$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ k & 2 & 8 \\ 5 & 1 & -k \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 19 \\ k & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & -k & 23+k \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ k & 2 & 8 \\ 5 & 1 & -k \end{vmatrix}=-10k+4k+40-40-40+k^2=0;$$

$$k^2-6k-40=0;\ \ k=\frac{6\pm\sqrt{36+160}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{196}}{2}=\frac{6\pm14}{2}=3\pm7 \Rightarrow k_1=-4, k_2=10.$$

$$\underline{Para\ \left\{\begin{matrix} k\neq -4 \\ k\neq 10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ k=-4 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 19 \\ -4 & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & 4 & 19 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_3\} \Rightarrow\ Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ k=-4 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ k=10 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 10 & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & -10 & 33 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 4 & 19 \\ 2 & 8 & 28 \\ 1 & -10 & 33 \end{vmatrix}=264-380+112-162+280-264=392-542=$$

$$=-150\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ k=10 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b)$

Para $k = 0$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} 5x + y + 4z = 19 \\ 2y + 8z = 28 \\ 5x + y = 23 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado y equivalente al sistema $\left.\begin{array}{r} 5x + y + 4z = 19 \\ y + 4z = 14 \\ 5x + y = 23 \end{array}\right\}$.

Restando a la primera ecuación la tercera: $4z = -4;\;\; z = -1$.

$y - 4 = 14;\;\; y = 18. \quad 5x + 18 = 23;\;\; 5x = 5;\;\; x = 1$.

$\underline{Solución: x = 1, y = 18, z = -1}$.

****

3º) a) Calcule la ecuación general del plano π que pasa por el punto $P(8,8,8)$ y tiene como vectores directores $\vec{u}=(1,2,-3)\ y\ \vec{v}=(-1,0,3)$.

b) Determine el valor del parámetro a para que el punto $Q(1,-5,a)$ pertenece al plano π y calcule la ecuación paramétrica de la recta r que pasa por Q y es perpendicular al plano π.

----

a)

$$\pi(P;\ \vec{u},\vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-8 & y-8 & z-8 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$6(x-8)+3(y-8)+2(z-8)-3(y-8)=0;\ \ 6(x-8)+2(z-8)=0;$$

$$3(x-8)+(z-8)=0;\ \ 3x-24+z-8=0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv 3x+z-32=0}.$$

b) Determine el valor del parámetro a para que el punto $Q(1,-5,a)$ pertenece al plano π y calcule la ecuación paramétrica de la recta r que pasa por Q y es perpendicular al plano π.

El punto $Q(1,-5,a)$ pertenecerá al plano $\pi \equiv 3x+z-32=0$ si satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 3x+z-32=0 \\ Q(1,-5,a) \end{array}\right\} \Rightarrow 3+a-32=0 \Rightarrow \underline{a=29}.$$

Un vector normal del plano π es $\vec{n}=(3,0,1)$.

Para $a=29$ el punto es $Q(1,-5,29)$.

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=-5 \\ z=29+\lambda \end{cases}}.$$

****

4º) Considere la función $f(x)=\frac{ax^2+b}{x}$, donde a y b son dos parámetros reales. Calcule los valores de a y b de manera que la función $f(x)$ tenga una asíntota oblicua de pendiente 1 y un mínimo en el punto de la gráfica de abscisa $x=2$.

Las asíntotas oblicuas son de la forma $y=mx+n$, siendo $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

$$m=1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax^2+b}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+b}{x^2}=1 \Rightarrow \underline{a=1}.$$

La función resulta $f(x)=\frac{x^2+b}{x}$.

Para que una función tenga un mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x-(x^2+b)\cdot 1}{x^2}=\frac{2x^2-x^2-b}{x^2}=\frac{x^2-b}{x^2}.$$

$$f'(2)=0 \Rightarrow \frac{2^2-b}{2^2}=0;\ \ 4-b=0 \Rightarrow \underline{b=4}.$$

Se justifica que el extremo relativo en un mínimo, para lo cual, la segunda derivada tiene que ser positiva para el valor encontrado.

La función resulta $f(x)=\frac{x^2+4}{x}$ y su primera derivada $f'(x)=\frac{x^2-4}{x^2}$.

$$f''(x)=\frac{2x\cdot x^2-(x^2-4)\cdot 2x}{x^4}=\frac{2x^2-2x^2+8}{x^3}=\frac{8}{x^3}.$$

$$f''(2)=\frac{8}{2^3}=1>0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ relativo\ para\ x=2, c.q.j.}$$

****

5º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$:

a) Encuentre la matriz X que satisface la ecuación $AX = I - 3X$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) Compruebe que la matriz X es invertible y calcule su matriz inversa.

----

a)

$$AX = I - 3X;\;\; AX + 3X = I;\;\; (A + 3I) \cdot X = I;$$

$$(A + 3I)^{-1} \cdot (A + 3I) \cdot X = (A + 3I)^{-1} \cdot I;\;\; I \cdot X = (A + 3I)^{-1}.$$

$$\underline{X = (A + 3I)^{-1}}.$$

b)

$$A + 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}. \quad |A + 3I| = -4 + 3 = -1.$$

$$(A + 3I)^t = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.\;\; Adj.de\ (A + 3I)^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$X = (A + 3I)^{-1} = \frac{Adj.de\ (A+3I)^t}{|A+3I|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}{-1} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}}.$$

$$X^{-1} = [(A + 3I)^{-1}]^{-1} = A + 3I \Rightarrow \underline{X^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}}.$$

****

6º) Considere la función $f(x) = x^3$.

a) Calcule en qué punto del tercer cuadrante la recta tangente a $y = f(x)$ es paralela a la recta $r \equiv 3x - y = 4$. Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica en ese punto y haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función y de las dos rectas.

b) Calcule el área de la región limitada por $y = f(x)$ y la recta $y = 3x + 2$.

----

a)

La pendiente de la recta $r \equiv 3x - y = 4$ es $m = 3$.

La pendiente de la tangente a la gráfica de una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada en ese punto.

$m = f'(x) = 3x^2 = 3;\ \ x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$

Como el punto de tangencia es del tercer cuadrante, el valor de la variable tiene que ser negativa, por lo cual, $x = -1$.

El punto de tangencia es el siguiente: $f(-1) = (-1)^3 = -1 \Rightarrow P(-1, -1)$.

La ecuación de la recta punto-pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$:

$y + 1 = 3(x + 1) = 3x + 3\ \Rightarrow\ \underline{t \equiv 3x - y + 2 = 0}$.

b)

Los puntos de corte de la función $y = f(x)$ y la recta $y = 3x + 2$ tienen como abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

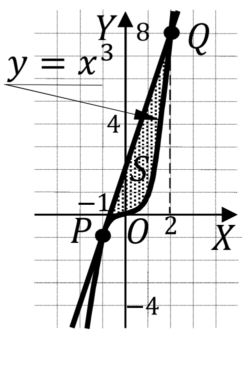
$x^3 = 3x + 2;\ \ x^3 - 3x - 2 = 0.$ Resolviendo por Ruffini:

	1	0	-3	-2
-1		-1	1	2
	1	-1	-2	$\boxed{0}$
-1		-1	-1	
	1	-2	$\boxed{0}$	
2		2		
	1	$\boxed{0}$		

Las raíces distintas son $x_1 = -1, x_2 = 2$.

Los puntos de corte son $P(-1, -1)\ y\ Q(2, 8)$.

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que indica la figura adjunta.



De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{2} [(3x + 2) - x^3]dx = \int_{-1}^{2} (-x^3 + 3x + 2) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{2^4}{4} + \frac{3\cdot 2^2}{2} + 2\cdot 2\right) - \left[-\frac{(-1)^4}{4} + \frac{3\cdot(-1)^2}{2} + 2\cdot(-1)\right] =$$

$$= -4 + 6 + 4 + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 = 8 + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{32+1-6}{4} = \frac{27}{4}.$$

$$\underline{S = \frac{27}{4}\ u^2 = 6{,}75\ u^2}.$$

****