PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CATALUÑA

JUNIO – 2021

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responde a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

1º) Considere la parábola $y = f(x) = 4 - x^2$ y un valor $a > 0$.

a) Comprueba que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa $x = a$ es $y = -2ax + a^2 + 4$ y calcule los puntos en que corta esta recta tangente a los ejes de coordenadas.

b) Calcule el valor de $a > 0$ pare que el área del triángulo determinado por la recta tangente y los ejes de coordenadas sea mínima.

----

a)

Para $x = a$ es $f(a) = 4 - a^2$, por lo cual el punto de tangencia es $P(a, 4 - a^2)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$f'(x) = -2x \Rightarrow m = f'(a) \Rightarrow m = -2a.$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(0, 1)$ con $m = -4$ es:

$$y - (4 - a^2) = -2a(x - a); \;\; y - 4 + a^2 = -2ax + 2a^2.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ la\ recta\ tangente\ es\ y = -2ax + a^2 + 4}.$$

La recta tangente corta a los ejes de coordenadas en los siguientes puntos:

$$X \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ y = -2ax + a^2 + 4 \end{array}\right\} \Rightarrow -2ax + a^2 + 4 = 0; \;\; x = \frac{a^2+4}{2a} \Rightarrow \underline{M\left(\frac{a^2+4}{2a}, 0\right)}.$$

$$Y \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=-2ax+a^2+4 \end{array}\right\} \Rightarrow y=a^2+4 \Rightarrow \underline{N(0,a^2+4)}.$$

$b)$

Por ser rectángulo el triángulo de vértices OMN, su área es la mitad del producto de sus catetos:

$$S_{OMN}(a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+4}{2a}\cdot(a^2+4)=\frac{1}{4}\cdot\frac{(a^2+4)^2}{a}.$$

Para que el área sea mínima tiene que anularse su primera derivada y ser positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$S'_{OMN}(a)=\frac{1}{4}\cdot\frac{[2\cdot(a^2+4)\cdot 2a]\cdot a-(a^2+4)^2\cdot 1}{a^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(a^2+4)\cdot[4a^2-(a^2+4)]}{a^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(a^2+4)\cdot(3a^2-4)}{a^2}.$$

$$S'_{OMN}(a)=0 \Rightarrow -\frac{1}{4}\cdot\frac{(a^2+4)\cdot(3a^2-4)}{a^2}=0;\ \ (a^2+4)\cdot(3a^2-4)=0.$$

Por ser $a^2+4\neq 0, \forall a\in R \Rightarrow 4a^2-1=0;\ \ 3a^2=4 \Rightarrow a_1=-\frac{2}{\sqrt{3}}, a_2=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

$$S''_{OMN}(a)=\frac{1}{4}\cdot\frac{[2a\cdot(3a^2-4)+(a^2+4)\cdot 6a]\cdot a^2-[(a^2+4)\cdot(3a^2-4)]\cdot 2a}{a^4}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{(6a^3-8a+6a^3+24a)\cdot a-2\cdot(3a^4-4a^2+12a^2-16)}{a^3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(12a^3+16a)\cdot a-2\cdot(3a^4+8a^2-16)}{a^3}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{12a^4+16a^2-6a^4+16a^2+32}{a^3}=\frac{1}{4}\cdot\frac{6a^4+32a^2+32}{a^3}\Rightarrow S''_{OMN}(a)=\frac{3a^4+16a^3+16}{2a^3}.$$

La solución $a_1=-\frac{2}{\sqrt{3}}$ carece de sentido lógico.

$$S''_{OMN}(a>0)>0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ a=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\underline{El\ \text{área}\ del\ triángulo\ es\ mínima\ para\ a=\frac{2}{\sqrt{3}}.}$$

****

2º) Considere el sistema $\left.\begin{array}{r} px+y+z=2 \\ 2x+py+p^2z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{array}\right\}$, dependiente del parámetro real p.

$a)$ Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro p.

$b)$ Resuelve, si es posible, el sistema para el caso de $p=2$.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & p & p^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} p & 1 & 1 & 2 \\ 2 & p & p^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro p es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & p & p^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=p^2+2+2p^2-2p-p^3-2=0;\ \ p^3-3p^2+2p=0;$$

$$p(p^2-3p+2)=0 \Rightarrow p_1=0. \qquad p^2-3p+2=0;\ \ p=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm 1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_2=1, p_3=2.$$

$$\underline{Para \left\{\begin{array}{l} p\neq 0 \\ p\neq 1 \\ p\neq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ p=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=4+2-4=2\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$Para\ p=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2+4+2-4-1-4=-1\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para \left\{\begin{array}{l} p=0 \\ p=1 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ p = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_3\} \Rightarrow Rang\ M' = 2$$

$$\underline{Para\ p = 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$

Para $p = 2$ el sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \end{array}\right\}$. Haciendo $z = \lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 2 - \lambda \\ 2x + 2y = 1 - 4\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -2x - y = -2 + \lambda \\ 2x + 2y = 1 - 4\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow y = -1 - 3\lambda.$$

$$2x + y = 2 - \lambda;\ \ 2x - 1 - 3\lambda = 2 - \lambda;\ \ 2x = 3 + 2\lambda;\ \ x = \frac{3}{2} + \lambda.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{3}{2} + \lambda, y = -1 - \lambda, z = \lambda, \forall\lambda \in R.}$$

****

3º) Sean el punto $P(-1,3,1)$, el plano $\pi \equiv x = y$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z - 2$.

a) Calcule las coordenadas del punto P' simétrico a P con respecto al plano π.

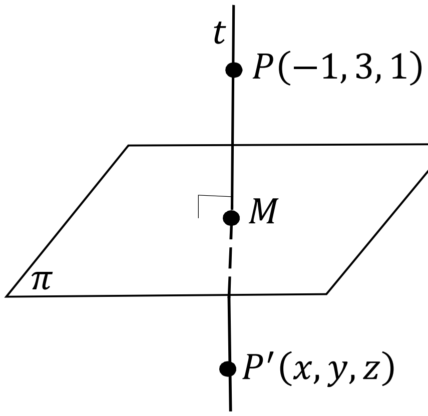
b) De todos los planos que contienen a la recta r, encuentra la ecuación cartesiana del plano β que es perpendicular al plano π.

----

a)

La recta t que pasa por $P(-1,3,1)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x - y = 0$ tiene como vector director al vector normal de π: $\vec{n} = (1,-1,0) \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$.

El punto M, intersección del plano π con la recta t es la solución del sistema que forman:



$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x - y = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow -1 + \lambda - (3 - \lambda) = 0;$$

$-1 + \lambda - 3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow M(1,1,1)$.

Tiene que cumplirse que $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MP'}$.

$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = [(1,1,1) - (-1,3,1)] = (2,-2,0)$.

$\overrightarrow{MP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OM} = [(x,y,z) - (1,1,1)] = (x-,y-1,z-1)$.

$$(2,-2,0) = (x-1,y-1,z-1) \Rightarrow \left.\begin{cases} x - 1 = 2 \to x = 3 \\ y - 1 = -2 \to y = -1 \\ z - 1 = 0 \to z = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{P'(3,-1,1)}.$$

b)

Un punto y un vector director de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z - 2$ son $Q(1,0,2)$ y $\overrightarrow{v_r} = (2,3,1)$.

El haz de planos γ que contienen a la recta r y son perpendiculares al plano π tienen como vector normal a cualquier vector que sea linealmente dependiente del producto vectorial del vector director de la recta r y del vector normal del plano π.

$$\overrightarrow{n'_\gamma} = \overrightarrow{v_r} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -i + 3k + 2k - j = -i - j + 5k \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_\gamma} = (1, 1, -5)$.

El haz de planos γ tiene por expresión general: $\gamma \equiv x + y - 5z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz γ, el plano β, que contiene al punto $Q(1, 0, 2)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \gamma \equiv x + y - 5z + D = 0 \\ Q(1, 0, 2) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + 0 - 5 \cdot 2 + D = 0;\ \ D - 9 = 0 \Rightarrow D = 9.$$

$$\underline{\beta \equiv x + y - 5z + 9 = 0}.$$

****

4º) Sea la función $f(x)=\frac{Lx}{x}$ definida en el dominio $x>0$, donde L es el logaritmo neperiano.

a) Calcule las coordenadas de un punto de la curva $y=f(x)$ en el que la recta tangente a la curva sea horizontal y analice si la función tiene un extremo relativo en ese punto.

b) Determine si la función $f(x)$ tiene alguna asíntota horizontal.

c) Calcule el área de la región delimitada por la curva $y=f(x)$ y las rectas $x=1$ y $x=e$. Haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función en el dominio $0<x<5$, en el que queda representada el área que ha calculado.

----

a)

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto. La pendiente de una recta horizontal es $m=0$.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-Lx\cdot 1}{x^2}=\frac{1-Lx}{x^2}.$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1-Lx}{x^2}=0;\ \ 1-Lx=0;\ \ Lx=1 \Rightarrow x=e.$$

$$f(e)=\frac{Le}{e}=\frac{1}{e}\ \Rightarrow\ \underline{P\left(e,\frac{1}{e}\right)}.$$

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo en un punto es que se anule su primera derivada en ese punto; esta condición, que es necesaria, no es suficiente; para que exista el extremo relativo es necesario que no se anule la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-Lx)\cdot 2x}{x^4}=\frac{-x-2x\cdot(1-Lx)}{x^4}=\frac{-1-2\cdot(1-Lx)}{x^3}=\frac{-1-2+2Lx}{x^3}=\frac{2Lx-3}{x^3}.$$

$$f''(e)=\frac{2Le-3}{e^3}=\frac{2\cdot 1-3}{e^3}=\frac{-1}{e^3}<0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x=e.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ tiene\ un\ máximo\ relativo\ en\ P\left(e,\frac{1}{e}\right).}$$

b)

Las asíntotas horizontales son de la forma $y=k$; son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{Lx}{x}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Ind.\Rightarrow \{L'Hopital\}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=$$

$= \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \underline{La\ recta\ y = 0\ (eje\ X)\ es\ asíntota\ horizonta\ para\ x > 0}.$

$c)$

En primer lugar, se hace la representación gráfica, aproximada, de la función.

Asíntotas: $y = 0$; $x = 0$. Máximo: $P\left(e, \frac{1}{e}\right) \approx (2{,}7; 0{,}37)$.

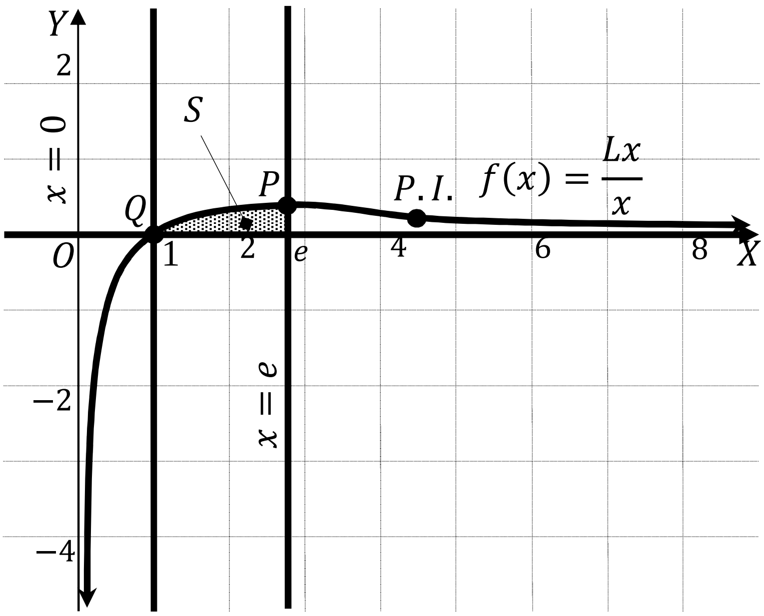
Se trata de una función continua en su dominio $(0, +\infty)$, creciente para $x < e$ y creciente para $x > e$ por tener un máximo (absoluto) para $x = e$.

Para $x = 1 \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow Q(1, 0)$.

De la expresión de la segunda derivada se deduce que tiene un punto de inflexión para $2Lx = 3$, por ser:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2Lx - 3}{x^3} = 0;\ \ 2Lx - 3 = 0 \Rightarrow 2Lx = 3;\ \ x = e^{\frac{3}{2}} \cong 4{,}5.$$

$$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2e\sqrt{e}} = \frac{3\sqrt{e}}{2e^2} \cong \frac{1}{3} = 0{,}33 \Rightarrow P.I.\left(e\sqrt{e}, \frac{3\sqrt{e}}{2e^2}\right) \approx (5{,}5; 0{,}33).$$



De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_1^e f(x) \cdot dx = \int_1^e \frac{Lx}{x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} Lx = t \\ \frac{1}{x} \cdot dx = dt \end{array} \middle| \begin{array}{c} x = e \to t = 1 \\ x = 1 \to t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 t \cdot dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \underline{\frac{1}{2}\ u^2 = 0{,}5\ u^2 = S}.$$

****

5º) $a)$ Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, resuelve la ecuación matricial $A^2X=A-3I$, donde I es la matriz identidad.

$b)$ Una matriz cuadrada M satisface que $M^3-3M^2+3M-I=O$, donde I es la matriz identidad. Justifique que M es invertible y exprese la inversa de M en función de las matrices M e I.

$a)$

$$A^2X=A-3I;\ \ (A^2)^{-1}\cdot A^2\cdot X=(A^2)^{-1}\cdot(A-3I);$$

$$I\cdot X=(A^2)^{-1}\cdot(A-3I)\Rightarrow \underline{X=(A^2)^{-1}\cdot(A-3I)}.$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Se obtiene la inversa de A^2 por el método de Gauss-Jordan.

$$(A^2|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\leftrightarrow F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{F_1\leftrightarrow F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right)\Rightarrow(A^2)^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

$$A-3I=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A-3I=\begin{pmatrix}-3&0&1\\1&-3&0\\0&1&-3\end{pmatrix}.$$

$$X=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&0&1\\1&-3&0\\0&1&-3\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{X=\begin{pmatrix}0&1&-3\\-3&0&1\\1&-3&0\end{pmatrix}}.$$

$b)$

$$M^3-3M^2+3M-I=O;\ \ M^3-3M^2+3M-O=I;$$

$$M^3-3M^2+3M=I;\ \ M\cdot(M^3-3M+3I)=I.$$

Por el concepto de inversa de una matriz:

$M \cdot M^{-1} = I$, de donde se deduce que: $M^{-1} = M^3 - 3M + 3I$.

Teniendo en cuenta que el módulo del producto de dos matrices es igual al producto de sus módulos y que $|I| = 1$:

$$|M \cdot M^{-1}| = |I| = 1; \;\; |M| \cdot |M^{-1}| = 1 \Rightarrow \begin{cases} |M| \neq 0 \\ |M^{-1}| \neq 0 \end{cases}.$$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

Queda probado que:

$$\underline{M \; es \; invertible \; y \; M^{-1} = M^3 - 3M + 3I}.$$

****

6º) Considere la función $f(x) = e^{x-1} - x - 1$.

a) Estudie la continuidad, los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Demuestre que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente dos soluciones reales entre $x = -1$ y $x = 3$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en su dominio, que es R, por ser la suma algebraica de funciones continuas.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = e^{x-1} - 1.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{x-1} - 1 = 0;\ \ e^{x-1} = 1 \Rightarrow x - 1 = 0;\ \ x = 1.$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x > 1 \in (1, +\infty)}.$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x < 1 \in (-\infty, 1)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f''(x) = e^{x-1}.$

$f''(1) = e^{1-1} = e^0 = 1 > 0 \Rightarrow Mínmo\ absoluto\ para\ x = 1.$

$f(1) = e^{1-1} - 1 - 1 = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1 \Rightarrow Mín. \Rightarrow \underline{P(1, -1)}.$

b)

Se sabe del apartado anterior que la función es continua en su dominio y que presenta un mínimo absoluto para $x = 1$.

Dividiendo el intervalo dado, $(-1, 3)$, en los intervalos $(-1, 1)\ y\ (1, 3)$, a la función $f(x)$ le es aplicable el teorema de Bolzano en cada uno de los dos últimos intervalos.

El teorema de Bolzano dice que “si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$".

$$(-1,1) \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = e^{-1-1} - (-1) - 1 = e^{-2} = \frac{1}{e^2} > 0 \\ f(1) = e^{1-1} - 1 - 1 = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \end{cases}.$$

Por ser $f(x)$ monótona decreciente en $(-1,1)$, demuestra que:

$$\underline{La\ ecuación\ f(x) = 0\ tiene\ una\ única\ raíz\ real\ en\ (-1,1).}$$

$$(1,3) \Rightarrow \begin{cases} f(1) = e^{1-1} - 1 - 1 = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \\ f(3) = e^{3-1} - 3 - 1 = e^2 - 4 \cong 4{,}39 > 0 \end{cases}.$$

Por ser $f(x)$ monótona creciente en $(1,3)$, demuestra que:

$$\underline{La\ ecuación\ f(x) = 0\ tiene\ una\ única\ raíz\ real\ en\ (1,3).}$$

$$\underline{Queda\ demostrado\ que\ f(x) = 0\ tiene\ exactamente\ dos\ raíces\ reales\ en\ (1,3).}$$

****