PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CATALUÑA

EXTRAORDINARIA – 2021

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responde a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

1º) Considere el sistema $\left.\begin{array}{r} x+ky+z=3+k \\ kx+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{array}\right\}$, dependiente del parámetro real k.

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k.

b) Resuelve, si es posible, el sistema para el caso de $k=1$ y haga una interpretación geométrica.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 3+k \\ k & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=1+3k+k-1-k^2-3=0;\ -k^2+4k-3=0;$$

$$k^2-4k+3=0;\ \ k=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=2\pm 1 \Rightarrow k_1=1, k_2=3.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} k\neq 1 \\ k\neq 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ k=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_2\} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ k = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ k = 3 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 54 + 12 - 6 - 12 - 45 = 8 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ k = 3 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b)$

Para $k = 1$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 4 \\ x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{array}\right\}$. Haciendo $z = \lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 4 - \lambda \\ x + 3y = 5 - \lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x - y = -4 + \lambda \\ x + 3y = 5 - \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2y = 1;\ \ y = \frac{1}{2}.$$

$$x = 4 - \lambda - y = 4 - \lambda - \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{2} - \lambda.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{7}{2} - \lambda, y = \frac{1}{2}, z = \lambda, \forall \lambda \in R.}$$

El sistema resultante significa geométricamente:

$$\underline{Dos\ planos\ coincidentes\ cortados\ por\ otro\ plano\ oblicuo.}$$

****

2º) a) Dada la función $f(x) = \frac{4}{x}$, calcule la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$. Encuentra también la ecuación de la recta normal a $f(x)$ en el mismo punto.

b) Haga un esbozo de la gráfica de la curva $y = f(x)$ y de la recta $4x + y = 8$, y calcule el área delimitada por estas dos gráficas, el eje de abscisas y la recta $x = 3$.

----

a)

Para $x = 1$ es $f(1) = 4$, por lo cual el punto de tangencia es $A(1, 4)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$f'(x) = -\frac{4}{x^2} \Rightarrow m = f'(1) = -\frac{4}{1^2} \Rightarrow m = -4.$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $A(1, 4)$ con $m = -4$ es:

$$y - 4 = -4(x - 1) = -4x + 4.$$

$\underline{\textit{La recta tangente es } t \equiv 4x + y - 8 = 0.}$

La pendiente de la recta normal es inversa y de signo contrario de la pendiente de la tangente: $m' = \frac{1}{4}$. La recta normal es la siguiente:

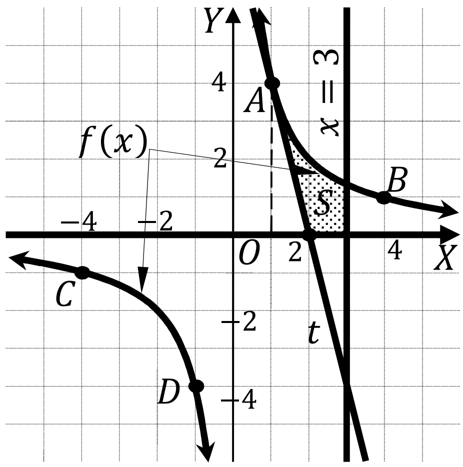
$$y - 4 = \frac{1}{4}(x - 1); \;\; 4y - 16 = x - 1.$$

$\underline{\textit{La recta normal es } n \equiv x - 4y + 15 = 0.}$

b)

La función $f(x) = \frac{4}{x}$ es una hipérbola equilátera referida a sus asíntotas, simétrica con respecto al origen de coordenadas y que contiene a los puntos $A(1, 4)$ y $B(4, 1)$ y sus puntos simétricos respectivos $C(-4, -1)$ y $D(-1, -4)$.

Nótese que la rectas dada, $4x + y = 8$, es la tangente, t, a la función en el punto $A(1, 4)$ obtenida en el apartado anterior.



En el intervalo $(1, 2)$, todas las ordenadas de la función $f(x)$ son mayores que las correspondientes ordenadas de la recta $t \equiv y = 8 - 4x$, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_1^2 [f(x) - t(x)] \cdot dx + \int_2^3 f(x) \cdot dx \Rightarrow S = A + B. \quad (*)$$

$$A = \int_1^2 \left[\frac{4}{x} - (8 - 4x)\right] \cdot dx = \int_1^2 \left(\frac{4}{x} + 4x - 8\right) \cdot dx = \left[4 \cdot Lx + \frac{4x^2}{2} - 8x\right]_1^2 =$$

$$= [4 \cdot Lx + 2x^2 - 8x]_1^2 = (4 \cdot L2 + 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2) - (4 \cdot L1 + 2 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1) =$$

$$= 4 \cdot L2 + 8 - 16 - 0 - 2 + 8 \Rightarrow A = 4 \cdot L2 - 2.$$

$$B = \int_2^3 \frac{4}{x} \cdot dx = [4 \cdot Lx]_2^3 \Rightarrow B = 4 \cdot L3 - 4 \cdot L2.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de A y B:

$$S = 4 \cdot L2 - 2 + 4 \cdot L3 - 4 \cdot L2 \Rightarrow \underline{S = (4 \cdot L3 - 2)\, u^2 \cong 2{,}39\, u^2}.$$

****

3º) En R^3 se dan los puntos $A(3,1,1), B(0,0,1), C(4,1,2)\ y\ D(1,1,t)$, en donde t es un valor real.

$a)$ ¿Para qué valor real de t los cuatro puntos son coplanarios?

$b)$ Encuentre el valor de t para que el tetraedro (irregular) que forman los cuatro puntos tenga un volumen de 5 u^3.
Nota: El volumen de un tetraedro definidos por los vectores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\ y\ \overrightarrow{v_3}$ es igual a un sexto del valor absoluto del determinante de la matriz formada por los tres vectores.

$a)$

Los puntos $A(3,1,1), B(0,0,1), C(4,1,2)\ y\ D(1,1,t)$ determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0,0,1) - (3,1,1)] = (-3,-1,0).$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(4,1,2) - (3,1,1)] = (1,0,1).$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = [(1,1,t) - (3,1,1)] = (-2,0,t-1).$$

Los puntos A, B, C y D serán coplanarios cuando lo sean los tres vectores que determinan, por lo cual, el rango de los tres vectores tiene que ser 2, es decir: que el determinante de la matriz que forman sea cero.

$$Rang\ \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = 2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t = -1.$$

$$\underline{Los\ puntos\ A, B, C\ y\ D\ son\ coplanarios\ para\ t = -1}.$$

$b)$

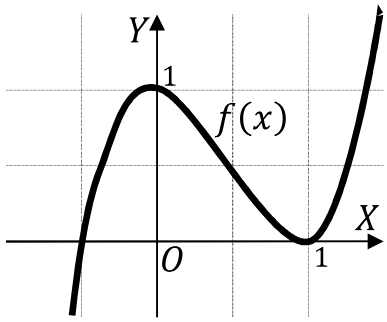
$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right) = 5 \Rightarrow \left\| \begin{matrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & t-1 \end{matrix} \right\| = 30;$$

$$|1+t| = 30 \Rightarrow \begin{cases} 1 + t = 30 \rightarrow t_1 = 29 \\ -1 - t = 30 \rightarrow t_2 = -31 \end{cases}.$$

$$\underline{El\ volumen\ del\ tetraedro\ ABCD\ es\ de\ 5\ u^3\ para\ t = 29\ y\ para\ t = 31}.$$

****

4º) a) En la figura adjunta se muestra la gráfica de la función $f(x)$. Represente de manera esquemática la gráfica de la función derivada de $f(x)$. Explique el razonamiento que ha seguido.



b) Calcule los valores de a y b para que la función $g(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ tenga un punto de inflexión en $x = \frac{1}{2}$ y su derivada en este punto sea $-\frac{3}{2}$.

----

a)

La derivada de una función representa el valor de la tangente de la función en cada uno de sus puntos. Por tener la función un máximo en $x = 0$ y un mínimo para $x = 1$, la función derivada se anula para estos valores, por lo cual, su expresión es de la forma: $f'(x) = \pm x \cdot (x - 1)$.

Para determinar el signo más o menos se tiene en cuenta, por ejemplo, que la función es decreciente en el intervalo $(0, 1)$, el signo es positivo y la función derivada tiene por expresión $f'(x) = x \cdot (x - 1)$, que es una parábola convexa $(\cup)$, por ser positivo el coeficiente de x^2.

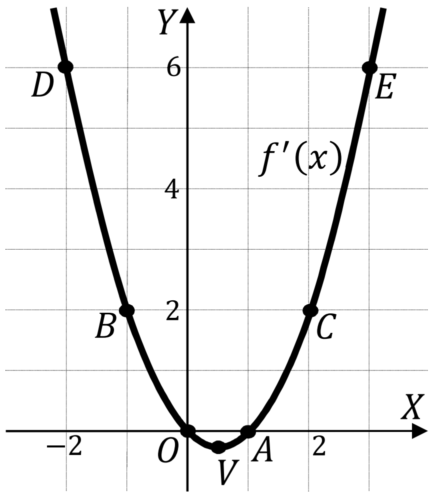
El vértice de la función derivada es el siguiente:

$f''(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow V\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Otros puntos de la función son los siguientes:

$O(0, 0), A(1, 0), B(-1, 2), C(2, 2), D(-2, 6)$ y $E(3, 6)$.



La representación gráfica de la función derivada es la que expresa la figura anterior.

b)

$g'(x) = 3ax^2 + 2bx$.

$g'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \Rightarrow 3a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2b \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$; $\frac{3}{4}a + b = -\frac{3}{2}$; $3a + 4b = -6$. (1)

Para que una función tenga un punto de inflexión en un punto es condición necesaria que se anule su segunda derivada en ese punto.

$g''(x) = 6ax + 2b$.

$g''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow 6a \cdot \frac{1}{2} + 2b = 0;\ \ 3a + 2b = 0.$ (1)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} 3a + 4b = -6 \\ 3a + 2b = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 3a + 4b = -6 \\ -3a - 2b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2b = -6 \Rightarrow \underline{b = -3}.$$

$3a + 2 \cdot (-3) = 0;\ \ a - 2 = 0 \Rightarrow \underline{a = 2}.$

****

5º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, siendo a un parámetro real.

a) Encuentre los valores de a para los cuales la matriz A es invertible.

b) Compruebe que, para $a = 3$, la matriz A es invertible y resuelve la ecuación matricial $A \cdot X = B - 3I$, siendo $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-a(a+1)(a+3) + a(a-1)(2a+1) + 2a(a+3) = 0;$$

$$a(a+3) \cdot [-(a+1) + 2] + a(a-1)(2a+1) = 0;$$

$$a(a+3)(1-a) - a(1-a)(2a+1) = 0; \;\; a(1-a)[(a+3) - (2a+1)] = 0;$$

$$a(1-a)(a+3-2a-1) = 0; \;\; a(1-a)(2-a) = 0 \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ en\ invertible\ \forall a \in R - \{0,1,2\}}.$$

b)

Del apartado anterior se deduce que la matriz A es invertible para $a = 3$, por lo que su comprobación es superflua; no obstante se comprueba a continuación.

Para $a = 3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -72 + 42 + 36 = 78 - 72 = 6 \neq 0.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ para\ a = 3\ la\ matriz\ A\ es\ invertible}.$$

$$A \cdot X = B - 3I; \;\; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (B - 3 \cdot I); \;\; I \cdot X = A^{-1} \cdot (B - 3 \cdot I) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot (B - 3 \cdot I)}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -72 + 42 + 36 = 6. \qquad A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$Adj. de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix}}{6} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix}.$$

También puede obtenerse la inversa de la matriz A por Gauss-Jordan:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 7F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & -7 & 7 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 5 & -4 & -1 \\ 0 & 7 & 8 & -7 & 7 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to -F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \to F_1 + F_2 \\ F_3 \to F_3 - 7F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 8 & -7 & 7 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \to F_1 + F_2 \\ F_3 \to F_3 - 7F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 28 & -21 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_3 \to -\frac{1}{6} F_3\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{14}{3} & \frac{7}{2} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - 2F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{13}{3} & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{14}{3} & \frac{7}{2} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$B - 3 \cdot I = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot (B - 3 \cdot I) = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -30 & -30 & -30 \\ 36 & 36 & 36 \\ -36 & -36 & -36 \end{pmatrix} = \underline{X = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -5 \\ 6 & 6 & 6 \\ -6 & -6 & -6 \end{pmatrix}}.$$

****

6º) Considere la función $f(x)=\frac{x^3}{x-2}$.

a) Estudie si tiene puntos críticos y, en caso de que los tenga, justifique de qué tipo son. Determine también cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) Compruebe que la ecuación $f(x)=0$ tiene una única solución en el intervalo $(-2,1)$.

----

a)

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores de x que anulan el denominador: $x-2=0;\ \ x=2 \Rightarrow D(f) \Rightarrow R-\{2\}$.

Una función tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) para los valores de x que anulan su primera derivada.

$$f'(x)=\frac{3x^2\cdot(x-2)-x^3\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{3x^3-6x^2-x^3}{(x-2)^2}=\frac{2x^3-6x^2}{(x-2)^2}=\frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}.$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}=0;\ \ 2x^2(x-3)=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=3.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trate de un máximo relativo y, si es positiva, de un mínimo relativo.

$$f''(x)=\frac{(6x^2-12x)\cdot(x-2)^2-2x^2(x-3)\cdot[2\cdot(x-2)\cdot 1]}{(x-2)^4}=\frac{(6x^2-12x)\cdot(x-2)-4x^2(x-3)}{(x-2)^3}=$$

$$=\frac{6x^3-12x^2-12x^2+24x-4x^3+12x^2}{(x-2)^3}=\frac{2x^3-12x^2+24x}{(x-2)^3}=\frac{2x(x^2-6x+12)}{(x-2)^3}.$$

$$f''(0)=\frac{2\cdot 0\cdot(0^2-6\cdot 0+12)}{(0-2)^3}=0\ \Rightarrow Ni\ máximo\ ni\ mínimo\ (para\ P.I.).$$

$$f''(3)=\frac{2\cdot 3\cdot(3^2-6\cdot 3+12)}{(3-2)^3}>0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x=3.$$

$$f(3)=\frac{3^3}{3-2}=\frac{27}{1}=27 \Rightarrow \underline{Mín. \Rightarrow A(3,27)}.$$

Una función tiene un punto de inflexión cuando se anula su segunda derivada y es distinta de cero la tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{2x(x^2-6x+12)}{(x-2)^3}=0 \Rightarrow 2x(x^2-6x+12)=0;\ \ x_1=0;$$

$x^2-6x+12=0;\ \ x=\frac{6\pm\sqrt{36-48}}{2} \Rightarrow x \notin R$. Solución única: $x=0$.

$$f'''(x) = \frac{(6x^2-24x+24)\cdot(x-2)^3-2x(x^2-6x+12)\cdot[3\cdot(x-2)^2\cdot 1]}{(x-2)^6} =$$

$$= \frac{(6x^2-24x+24)\cdot(x-2)-6x(x^2-6x+12)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{6x^3-12x^2+24x^2-48x+24x-48-6x^3+36x^2-72x}{(x-2)^4} = \frac{48x^2-96x-48}{(x-2)^4} = \frac{48(x^2-2x-1)}{(x-2)^3}.$$

$$f'''(0) = \frac{48(0^2-2\cdot 0-1)}{(0-2)^3} = \frac{-48}{-8} = 6 \neq 0 \Rightarrow P.I. para\ x = 0.$$

$$f(0) = \frac{0^3}{0-2} = 0 \Rightarrow \underline{P.I. \to O(0,0)}.$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3.$$

Teniendo en cuenta el dominio de la función y las raíces de su primera derivada, se determinan los intervalos $(-\infty, 0), (0, 2), (2, 3)\ y\ (3, +\infty)$, en los cuales la función es creciente o decreciente. Determinamos cada caso.

Para $x = -1 \in (-\infty, 0) \Rightarrow f'(-1) = \frac{2\cdot(-1)^2(-1-6)}{(-1-2)^2} < 0 \Rightarrow Decrec.$

Para $x = 1 \in (0, 2) \Rightarrow f'(1) = \frac{2\cdot 1^2\cdot(1-6)}{(1-2)^2} < 0 \Rightarrow Decrec.$

Para $x = 2{,}5 \in (2, 3) \Rightarrow f'(2{,}5) = \frac{2\cdot 2{,}5^2\cdot(3-3)}{(3-2)^2} < 0 \Rightarrow Decrec.$

Para $x = 5 \in (3, +\infty) \Rightarrow f'(8) = \frac{2\cdot 5^2\cdot(5-3)}{(5-2)^2} > 0 \Rightarrow Crec.$

$$\underline{Crecimiento \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (3, +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (2, 3)}.$$

$b)$

La función $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$ es continua en el intervalo $[-2, 1]$, por lo cual, le es aplicable el teorema de Bolzano, que dice que “si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$”.

$$f(-2) = \frac{(-2)^3}{-2-2} = \frac{-8}{-4} = 2 > 0. \qquad f(1) = \frac{1^3}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1 < 0.$$

Lo anterior demuestra que la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz real en el intervalo $(-2, 1)$.

Teniendo en cuenta que la función $f(x)$ es monótona decreciente en el intervalo $(-2, 1)$, demuestra que:

$$\underline{La\ ecuación\ f(x) = 0\ tiene\ una\ única\ solución\ en\ el\ intervalo\ (-2, 1).}$$

Otra forma de demostrar este apartado es la siguiente:

Si tuviera otra raíz $x = \beta \in (-2, 1)$, tal que $f(\beta) = 0$, se podría aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo $[-2, 1]$; el teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $a, b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

Del apartado anterior sabemos que $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 6 \notin [-2, 1]$, por lo cual, la única raíz de $f'(x) = 0$ es $x = 0$, y esto demuestra que

$$\underline{La\ ecuación\ f(x) = 0\ tiene\ una\ única\ solución\ en\ el\ intervalo\ (-2, 1).}$$

****