PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CATALUÑA

JUNIO – 2022

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responde a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

1º) Sea $f'(x) = 3x^2 - 12x$ la derivada de una función $f(x)$.

a) Si sabemos que $f(x)$ corta al eje de abscisas en $x = 1$, calcula la expresión de $f(x)$.

b) Calcule la abscisa del punto de inflexión de $f(x)$ y estudie la concavidad de la función.

c) Sabemos que el área del recinto limitado por la curva $f''(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = a$, con $a > 2$ es 15 u^2. Calcule el valor de a.

----

a)

$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int (3x^2 - 12x) \cdot dx = \frac{3x^3}{3} - \frac{12x^2}{2} + C = x^3 - 6x^2 + C.$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1^3 - 6 \cdot 1^2 + C = 0;\;\; 1 - 6 + C = 0 \Rightarrow C = 5.$$

$$\underline{f(x) = x^3 - 6x^2 + 5}.$$

b)

Una función polinómica tiene un punto de inflexión cuando se anula su segunda derivada.

$$f''(x) = 6x - 12 = 0;\;\; x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

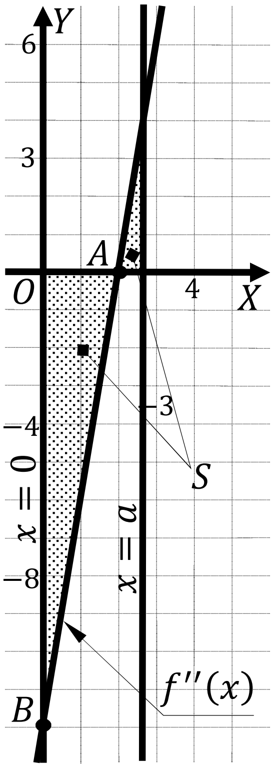
$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 5 = 8 - 24 + 5 = -11 \Rightarrow \underline{P.I. \rightarrow P(2, -11)}.$$

Una función es cóncava ($\cap$) o convexa ($\cup$) cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$$\underline{Concavidad\ (\cap): f''(x) < 0 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow \in (-\infty, 2)}.$$

$\underline{Convexidad\ (\cup): f'(x) > 0 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow \in (2, +\infty).}$

$c)$



La función $f''(x) = 6x - 12$ es una recta que contiene a los puntos $A(2, 0)$ y $B(3, 6)$. La representación gráfica de la situación se indica, de forma aproximada, en la figura adjunta.

$$S = \int_2^0 (6x - 12) \cdot dx + \int_2^a (6x - 12) \cdot dx = 15;$$

$$\left[\frac{6x^2}{2} - 12x\right]_2^0 + \left[\frac{6x^2}{2} - 12x\right]_2^a = 15;$$

$$[3x^2 - 12x]_2^0 + [3x^2 - 12x]_2^a =$$

$$= 0 - (3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2) + (3a^2 - 12a) - (3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2) =$$

$$= -12 + 24 + 3a^2 - 12a - 12 + 24 = 15;$$

$$3a^2 - 12a + 9 = 0;\ a^2 - 4a + 3 = 0;$$

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 3.$$

La solución $a = 1$ no cumple la condición de $a > 2$, por lo cual: $\underline{a = 3}$.

****

2º) Considere el sistema $\left.\begin{array}{r} ax+2y+3z=2 \\ 2x+ay+z=a \\ x+y+4z=1 \end{array}\right\}$, dependiente del parámetro real a.

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a.

b) Resuelve, si es posible, el sistema para el caso de $a=2$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} a & 2 & 3 & 2 \\ 2 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=4a^2+6+2-3a-a-16=4a^2-4a-8=0;$$

$a^2-a-2=0;\ \ a=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm3}{2}\Rightarrow a_1=-1, a_2=2.$

$$\underline{Para\ \left\{\begin{array}{c} a\neq-1 \\ a\neq 2 \end{array}\right\}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$a=-1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\{F_1+F_2=-F_3\}\Rightarrow Rang\ M=2.$$

$$a=2\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\{C_1=C_4\}\Rightarrow Rang\ M=2.$$

$$\underline{Para\ \left\{\begin{array}{c} a=-1 \\ a=2 \end{array}\right\}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}$$

b)

Para $a=2$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} 2x+2y+3z=2 \\ 2x+2y+z=2 \\ x+y+4z=1 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado. Para su resolución se elimina una ecuación (primera).

$\left.\begin{array}{r} 2x+2y+3z=2 \\ x+y+4z=1 \end{array}\right\}\Rightarrow$ Haciendo $y=\lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3z=2-2\lambda \\ x+4z=1-\lambda \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} -2x-3z=-2+2\lambda \\ 2x+8z=2-2\lambda \end{array}\right\}\Rightarrow 5z=0;\ \ z=0.\ \ x=1-\lambda.$$

$\underline{Solución: x = 1 - \lambda,\ y = \lambda,\ z = 0,\ \forall \lambda \in R}.$

****

3º) Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$.

a) Determine la posición relativa de la recta r respecto al plano $\pi \equiv x - 2y + 4z - 4 = 0$. Si el paralela, calcule la distancia de r a π, si es secante, calcule el punto de corte.

b) Calcule la ecuación de la recta s perpendicular al plano π y que corta a la recta r en un punto P, la primera coordenada de éste es 5 veces mayor que la segunda.

----

a)

Un vector director de la recta es $\overrightarrow{v_r} = (1, 3, 1)$.

Un vector normal del plano es $\vec{n} = (1, -2, 4)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\vec{n}$ no son paralelos por no ser proporcionales sus componentes.

$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = (1, 3, 1) \cdot (1, -2, 4) = 1 - 6 + 4 = -1 \neq 0 \;\Rightarrow$ Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\vec{n}$ no son perpendiculares, por lo cual:

$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes.}$$

Otra forma de resolver este apartado es la siguiente:

La expresión de r dada por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv x - 2 = \frac{y+1}{3} = z - 3 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x - 6 = y + 1 \\ x - 2 = z - 3 \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 3x - y = 7 \\ x - z = -1 \end{cases}.$$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} 3x - y = 7 \\ x - z = -1 \\ x - 2y + 4z = 4 \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de $M\ y\ M'$ pueden presentarse los siguientes casos:

$1 \rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow La\ recta\ está\ contenida\ en\ el\ plano.$

$2 \rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ es\ paralela\ al\ plano.$

$3 \to Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ y\ el\ plano\ son\ secantes.$

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 1 - 6 + 4 = -1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes}.$$

El punto Q de intersección de la recta r y el plano π es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x - 2y + 4z - 4 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (2 + \lambda) - 2(-1 + 3\lambda) + 4(3 + \lambda) = 4;$$

$$2 + \lambda + 2 - 6\lambda + 12 + 4\lambda = 4;\ \ \lambda = -12 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 + 12 = 14 \\ y = -1 + 36 = 35 \\ z = 3 + 12 = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{Q(14, 35, 15)}$.

$b)$

Un punto genérico de r es $A'(2 + \lambda, -1 + 3\lambda, 3 + \lambda)$ y de ellos, el que tiene la primera coordenada 5 veces mayor que la segunda es el siguiente:

$$2 + \lambda = 5 \cdot (-1 + 3\lambda);\ \ 2 + \lambda = -5 + 15\lambda;\ \ 7 = 14\lambda;\ \ \lambda = \frac{1}{2}.$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ y = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \\ z = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow A\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right).$$

La recta s pedida tiene como vector director al vector normal del plano, que es $\vec{n} = (1, -2, 4)$, y que contiene al punto $A\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{s \equiv \begin{cases} x = \frac{5}{2} + \mu \\ y = \frac{1}{2} - 2\mu \\ z = \frac{7}{2} + 4\mu \end{cases}}.$

****

4º) a) Encuentre una función polinómica $y = g(x)$ de grado 3 tal que corte al eje de ordenadas en el punto $A(0, 5)$, que la recta tangente a $y = g(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal y que $g''(x) = 2x + 1$.

b) Compruebe que la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16$ tiene una raíz en $x = 2$ y que es estrictamente creciente en el intervalo $(0, 4)$. Utilice esta información para calcular el área determinada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

----

a)

Sea la función $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Por cortar al eje de ordenadas en el punto $A(0, 5)$: $g(0) = 5 \Rightarrow d = 5$.

Por ser horizontal la recta tangente a $y = g(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ se cumple que: $g'(1) = 0$.

$g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

$g'(1) = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0;\ \ 3a + 2b + c = 0. \quad (1)$

$g''(x) = 6ax + 2b$.

$g''(x) = 2x + 1 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 6a = 2 \\ 2b = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = \frac{1}{3};\ \ b = \frac{1}{2}$.

Sustituyendo en (1) los valores obtenidos de a y b:

$3 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} + c = 0;\ \ 1 + 1 + c = 0 \Rightarrow c = -2$.

$$\underline{g(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5.}$$

b)

$f(2) = -2^3 + 6 \cdot 2^2 - 16 = -8 + 24 - 16 = 0$.

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ x = 2\ es\ una\ raíz\ de\ f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16.}$

$f'(x) = -3x^2 + 12x$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 12x = 0;\ -3x(x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$.

$\underline{f'(x) > 0 \Rightarrow (Creciente) \Rightarrow \forall x \in (0, 4), como\ había\ que\ comprobar.}$

Teniendo en cuenta que $f(0) = -16 < 0$ y que $f(4) = -4^3 + 6 \cdot 4^2 - 16 =$

$= -64 + 96 - 16 = 96 - 80 = 16 > 0$, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_2^0 f(x) \cdot dx + \int_2^4 f(x) \cdot dx = [F(x)]_2^0 + [F(x)]_2^4 =$$

$= F(0) - F(2) + F(4) - F(2) \Rightarrow S = F(0) + F(4) - 2 \cdot F(2).$ (*)

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int (-x^3 + 6x^2 - 16) \cdot dx = -\frac{x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} - 16x \Rightarrow$$

$\Rightarrow F(x) = -\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 16x.$ Sustituyendo este valor en (*):

$$S = 0 + \left(-\frac{4^4}{4} + 2 \cdot 4^3 - 16 \cdot 4\right) - 2 \cdot \left(-\frac{2^4}{4} + 2 \cdot 2^3 - 16 \cdot 2\right) =$$

$= -64 + 128 - 64 + 8 - 32 + 64 \Rightarrow \underline{S = 40\ u^2}.$

****

5º) Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, que depende de los parámetros a, b y c.

a) Calcule las matrices X tales que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Determine los valores de a, b y c para que $X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

----

a)

$$X^2 = X \cdot X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} a^2 = b^2 = c^2 = 1 \\ a+b=0 \\ b+c=0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = 1 \to b = -1; c = 1 \\ a = -1 \to b = 1; c = -1 \end{array} \right\}.$$

$$\underline{Soluciones: X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ y\ X_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

b)

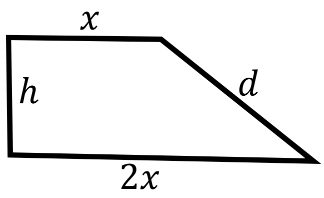
Sabiendo que $X^{-1} \cdot X = X \cdot X^{-1} = I$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{2} & \frac{1}{2}-\frac{b}{2} & -\frac{1}{2}-\frac{c}{2} \\ 0 & b & 1+c \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{a = 2, b = 1, c = -1}.$$

****

6º) En el patio de una escuela se quiere crear un área de juego de 30 m² para los más pequeños en forma de trapecio rectangular, por lo que la base mayor mida el doble de la base menor, tal como muestra la figura, y que el lado oblicuo respecto de las bases (d) se tan corto como sea posible.



a) Justifique que se satisfacen las relaciones $h = \frac{20}{x}$ y $d(x) = \sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}$.

b) Encuentre las dimensiones del trapecio para los que la longitud del lado d es mínima.

----

a)

La superficie del trapecio rectángulo es $S = \frac{Base+base}{2} \cdot Altura$:

$$S = \frac{2x+x}{2} \cdot h = 30;\ \ \frac{3x}{2} \cdot h = 30;\ \ \frac{x}{2} \cdot h = 10 \Rightarrow \underline{h = \frac{20}{x}}.$$

De la observación de la figura se deduce, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que se puede formar en el trapecio:

$$d = \sqrt{x^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{20}{x}\right)^2 + x^2} \Rightarrow \underline{d(x) = \sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}}.$$

b)

Para que el lado d sea mínimo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$d'(x) = \frac{\frac{-400 \cdot 2x}{x^4} + 2x}{2 \cdot \sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}} = 0 \Rightarrow \frac{-400 \cdot 2x}{x^4} + 2x = 0;\ \ \frac{-400}{x^3} + x = 0;\ \ x = \frac{400}{x^3};$$

$$x^4 = 400;\ \ x^2 = 20;\ \ x = +\sqrt{20} \Rightarrow x = 2\sqrt{5}. \quad\quad h = \frac{20}{2\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} \Rightarrow h = 2\sqrt{5}.$$

$$d = \sqrt{x^2 + h^2} = \sqrt{20 + 20} = \sqrt{40} \Rightarrow d = 2\sqrt{10}$$

$$\underline{Soluición\!: x = d = 2\sqrt{5}\ unidades;\ \ h = 2\sqrt{10}\ unidades.}$$

****