Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2022

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 2

Qualificació			TR
Qüestions	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
Suma de notes parcials			
Qualificació final			

Etiqueta de l'alumne/a

Ubicació del tribunal ....

Número del tribunal ....

Etiqueta de qualificació

Etiqueta del corrector/a

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Sea $f'(x) = 3x^2 - 12x$ la derivada de una función $f(x)$.

a) Si se sabe que $f(x)$ corta el eje de abscisas en $x = 1$, calcule la expresión de la función $f(x)$.
[0,75 puntos]

b) Calcule la abscisa del punto de inflexión de $f(x)$ y estudie la concavidad de la función.
[0,75 puntos]

c) Se sabe que el área del recinto limitado por la curva $y = f''(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = a$, con $a > 2$, es $15u^2$. Calcule el valor de a.

[1 punto]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 1	*a*	
	b	
	c	
	Total	

2. Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente, que depende del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax + 2y + 3z = 2 \\ 2x + ay + z = a \\ x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a.
[1,5 puntos]

***b*)** Resuelva, si es posible, el sistema para el caso $a = 2$.
[1 punto]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 2	*a*	
	b	
	Total	

3. Sea la recta r definida por la siguiente expresión:

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

a) Determine la posición relativa de la recta r respecto del plano $\pi: x - 2y + 4z - 4 = 0$. Si es paralela, calcule la distancia de r a π, y si es secante, calcule el punto de corte.
[1,25 puntos]

b) Calcule la ecuación de la recta s perpendicular al plano π y que corta la recta r en un punto P, la primera coordenada del cual es 5 veces mayor que la segunda.
[1,25 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 3	*a*	
	b	
	Total	

4. ***a)*** Encuentre una función polinómica $y = g(x)$ de grado 3 tal que corte el eje de ordenadas en el punto (0, 5), que la recta tangente a $y = g(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal y que $g''(x) = 2x + 1$.

[1 punto]

***b*)** Compruebe que la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16$ tiene una raíz en $x = 2$ y que es estrictamente creciente en el intervalo (0, 4). Utilice esta información para calcular el área determinada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

[1,5 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 4	*a*	
	b	
	Total	

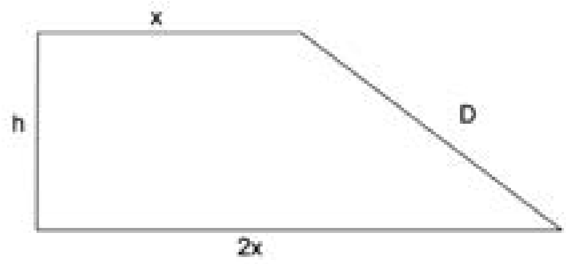
5. Sea la matriz $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, que depende de los parámetros a, b y c.

***a*)** Calcule las matrices $\boldsymbol{X}$ tales que $\boldsymbol{X}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
[1,5 puntos]

***b*)** Determine los valores de a, b y c para que la matriz inversa de $\boldsymbol{X}$ sea $\boldsymbol{X}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
[1 punto]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 5	*a*	
	b	
	Total	

6. En el patio de una escuela se quiere crear una área de juego de $30\,\text{m}^2$ para los más pequeños en forma de trapecio rectangular, de manera que la base mayor mida el doble que la base menor, como se indica en la figura, y que el lado oblicuo respecto a las bases (D) sea tan corto como sea posible.



***a*)** Justifique que se verifican las relaciones siguientes: $h = \dfrac{20}{x}$ y $D(x) = \sqrt{\dfrac{400}{x^2} + x^2}$.
[1 punto]

b) Encuentre las dimensiones del trapecio para las que la longitud del lado D es mínima.
[1,5 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 6	*a*	
	b	
	Total	

[Página para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión.]

[Página para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión.]

Etiqueta de l'alumne/a

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2022

Proves d'accés a la universitat

Matemáticas

Serie 5

Qualificació			TR
Qüestions	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
Suma de notes parcials			
Qualificació final			

Etiqueta de l'alumne/a

Ubicació del tribunal ....

Número del tribunal ....

Etiqueta de qualificació

Etiqueta del corrector/a

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Sean las matrices $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

***a*)** Compruebe que $\boldsymbol{C}^3 = \boldsymbol{I}_2$, donde $\boldsymbol{I}_2$ es la matriz identidad de orden 2, y deduzca que la matriz $\boldsymbol{C}$ es invertible y que $\boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{C}^2$. Calcule $\boldsymbol{C}^{2022}$.

[1,5 puntos]

***b*)** Resuelva la ecuación matricial $\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}_2$.

[1 punto]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 1	*a*	
	b	
	Total	

2. Considere la función $f(x) = x^3$ y sea a un número real estrictamente positivo.

***a*)** Calcule la ecuación de la recta t tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = a$. Encuentre el punto de corte de la recta t con el eje de abscisas (en función de a).

[1,25 puntos]

***b*)** Haga un esbozo de la gráfica de la función f y la recta t. Calcule el valor de a para que el área en el primer cuadrante limitada por la función f, la recta t y el eje de abscisas sea $108\ u^2$.

[1,25 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 2	*a*	
	b	
	Total	

3. Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 0 \\ my + (3-m)z &= -6 \\ 2x - y + mz &= 6 \end{aligned}\right\},$$

donde m es un parámetro real.

***a*)** Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro m.
[1,25 puntos]

***b*)** Resuelva el sistema, si es posible, cuando $m = 0$ y cuando $m = 3$. En cada caso, dé la posición relativa de los tres planos en $\mathbb{R}^3$.

[1,25 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 3	*a*	
	b	
	Total	

4. En $\mathbb{R}^2$, considere los triángulos rectángulos que tienen los vértices en los puntos $O = (0, 0)$, $A = (x, 0)$ y $B = (0, y)$, con $x > 0$ e $y > 0$, y en que la suma de los catetos es 10.

a) Exprese el área del triángulo *AOB* en función de x. ¿Para qué valor de x el área del triángulo *AOB* es lo más grande posible? ¿Qué valor tiene esta área máxima?

[1,25 puntos]

***b*)** Exprese la hipotenusa del triángulo AOB en función de x. ¿Para qué valor de x la hipotenusa del triángulo AOB es lo más pequeña posible? ¿Cuál es ese valor mínimo?
[1,25 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 4	*a*	
	b	
	Total	

5. Sean los puntos $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (-1, -1, 1)$ y $D = (1, 0, 1)$.

***a*)** Compruebe que tres de estos puntos están alineados. Determine cuáles son los tres puntos y calcule la ecuación continua y la ecuación paramétrica de la recta que definen.

[1,25 puntos]

b) Calcule la ecuación general o cartesiana del plano que determinan los cuatro puntos.
[1,25 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 5	*a*	
	b	
	Total	

6. La columna de la izquierda de la siguiente tabla muestra el esquema de un programa informático que se ha elaborado para encontrar soluciones aproximadas de una ecuación $f(x) = 0$ en un intervalo (a, b), sabiendo que $f(a) \cdot f(b) < 0$. La columna de la derecha recoge un ejemplo de funcionamiento del programa donde puede verse cómo actuaría para encontrar una solución de la ecuación $x + \ln(x) = 0$ entre los valores $a = 0{,}5$ y $b = 2$.

Esquema del programa	*Ejemplo*
1. Escribir «Introduzca un valor a»	El usuario introduce $a = 0{,}5$
2. Escribir «Introduzca un valor b»	El usuario introduce $b = 2$
3. Escribir «Introduzca una función $f(x)$»	El usuario introduce $f(x) = x + \ln(x)$
4. Calcular $c = (a + b)/2$	El programa calcula la media entre a y b y le asigna el nombre $c = (0{,}5 + 2)/2 = 1{,}25$
5. Si $f(a) * f(c) < 0$, entonces reasignar $b = c$; en caso contrario, reasignar $a = c$	El programa comprueba que $f(0{,}5) * f(1{,}25) = (0{,}5 + \ln(0{,}5)) * (1{,}25 + \ln(1{,}25)) < 0$, por lo tanto, reasigna $b = 1{,}25$
6. Repetir los pasos 4 y 5 tantas veces como haga falta hasta que $f(a) - f(b) < 0{,}00000001$	El programa va repitiendo la comprobación anterior, cambiando cada vez los valores de a o de b: *a* *b* inicio 0,5 2 iteración 1 0,5 1,25 iteración 2 0,5 0,875 iteración 3 0,5 0,6875 iteración 4 0,5 0,59375 iteración 5 0,546875 0,59375 iteración 6 0,546875 0,5703125 iteración 7 0,55859375 0,5703125 […]
7. Cuando $f(a) - f(b) < 0{,}00000001$, escribir: «La solución de la ecuación es c» y parar el programa	Después de unas 30 iteraciones, el programa escribe: «La solución de la ecuación es 0,56714329»

a) Explique por qué este programa es capaz de encontrar una solución aproximada de la ecuación $x + \ln(x) = 0$ entre los valores $a = 0{,}5$ y $b = 2$.

[1,25 puntos]

***b*)** Se quiere aplicar este programa para encontrar las tres raíces de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ con valores de a y b diferentes. Encuentre justificadamente entre qué valores a y b, para cada raíz, se debe aplicar el programa para encontrar aproximaciones de cada una de las tres raíces de la función.

[1,25 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 6	*a*	
	b	
	Total	

[Página para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión.]

[Página para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión.]

Etiqueta de l'alumne/a

Institut d'Estudis Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés