UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOGSE - SEPTIEMBRE 2000

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. El ejercicio consta de tres bloques de problemas y cada bloque tiene dos opciones. Debe responderse necesariamente a los tres bloques, escogiendo en cada uno de ellos una sola de las opciones (A o B).
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento del problema o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Todas las preguntas se puntúan igual.

BLOQUE 1

1.A. Sea $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x-2}$. Se pide:

a) Dominio y cortes con los ejes.

b) Estudio de las asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

c) Hacer una gráfica representando los datos obtenidos antes. Si es posible, completar la definición de $f(x)$ en los puntos en que sea necesario para obtener una nueva función que sea continua en todo $\mathbb{R}$ o en todo $\mathbb{R}$ salvo un número finito de puntos.

1.B. Para cualquier número real a, se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x & si \quad -\infty < x \le 0 \\ sen(ax) & si \quad 0 < x < \pi \\ (x-\pi)^2+1 & si \quad \pi \le x < \infty \end{cases}$$

a) Determinar los valores de a para los cuales $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$. Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para cada uno de estos valores.

b) Determinar un valor de b para el cual la función $sen(bx)$ tenga exactamente 40 mínimos en el intervalo $(0, \pi)$.

BLOQUE 2

2.A. Si la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene rango 1 y la matriz $B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ tiene rango 2, explicar qué valores puede tener el rango de las matrices:

$$C=\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & z & w \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 \\ z & w & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad E=\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & 0 & y & 0 \\ z & 0 & w & 0 \end{pmatrix}$$

2.B. Averiguar, según el valor de a, el número de raíces reales que tiene la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x^2 & a & a & a \\ a & x^2 & a & a \\ a & a & x^2 & a \\ a & a & a & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

BLOQUE 3

3.A. Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en los puntos $P = (2, 1, 3)$ y $Q = (1, 3, 1)$ y los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto $R = (-4, 7, -6)$. Se pide:

a) Ecuación de la recta r y del plano que contiene al cuadrado.

b) Calcular los otros dos vértices de este cuadrado y la longitud de su diagonal.

3.B. Se consideran las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x - ay = 1 \\ y - z = 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ x + y + z = 8 \end{cases}$$

Probar que, para ningún valor de a, r y s pueden ser paralelas y averiguar el único valor de a para el cual se cortan.

Para este valor de a, se pide:

a) Calcular el punto P intersección de r y s y la ecuación del plano π que las contiene.

b) Determinar la ecuación de la recta t que está contenida en π y es perpendicular a r en el punto P. Escribir la ecuación de otras dos rectas que sean perpendiculares a r por el punto P.