UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOGSE - SEPTIEMBRE 2004

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. El ejercicio consta de tres bloques de problemas y cada bloque tiene dos opciones. Debe responderse necesariamente a los tres bloques, escogiendo en cada uno de ellos una sola de las opciones (A o B).
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento del problema o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Todas las preguntas se puntúan igual.
4. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables.**

BLOQUE 1

1.A. a) Estudia, según el valor de k, el rango de la matriz A siguiente.

$$A = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 0 \\ 0 & k+1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Calcula, si es posible, un valor de k para que el sistema siguiente sea compatible determinado. Justifica tu respuesta.

$$\begin{pmatrix} k+1 & 1 & 0 \\ 0 & k+1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Lo mismo que en (b), pero para que el sistema sea compatible indeterminado.

d) Lo mismo que en (b), pero para que el sistema sea incompatible.

1.B. a) Calcula el determinante de la matriz A siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

b) Calcula la inversa de A para el valor $k = 0$.

c) Obtén, de forma justificada, una expresión para el determinante de la matriz de orden n que tiene la misma estructura que A, es decir:

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & k \end{pmatrix}$$

BLOQUE 2

2.A. Considera la función $f(x) = \dfrac{1+x}{1-|x|}$. Se pide:

a) Dominio y corte con los ejes.

b) Asíntotas.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

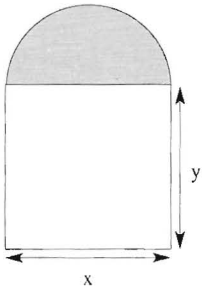
c) Dibuja la gráfica de la función.

2.B. Una ventana tiene la forma de un semicírculo colocado sobre un rectángulo. El rectángulo es de cristal transparente, pero el semicírculo es de cristal tintado.

El cristal tintado transmite la mitad de luz por unidad de área que el cristal transparente. Así, la función que nos da la cantidad de luz que pasa por la ventana es:

$$f(x,y) = x.y + \frac{\pi}{4}.\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

Sabiendo que el perímetro total de la ventana ha de ser de 2 metros, calcula las dimensiones x e y de la ventana que proporcionan el máximo posible de luz.



BLOQUE 3

3.A. a) Halla las ecuaciones en forma implícita de la recta r que pasa por el punto P = (1 ,2, 3) y tiene por vector director $\vec{v} = (6, 5, 4)$.

b) Calcula la ecuación implícita del plano π que contiene a r y pasa por el punto (1, 1 ,2).

c) Calcula el área del triángulo de vértices P_1, P_2 y P_3 donde:
- P_1 es el punto de corte entre π y el eje X,
- P_2 es el punto de corte entre π y el eje Y,
- P_3 es el punto de corte entre π y el eje Z.

3.B. Considera los vectores $\vec{v}_1 = (2, 1 .2)$, $\vec{v}_2 = (4, 3, 2)$ y $\vec{v}_3 = (-k-1 ,2k+2, 2)$.

a) Calcula la ecuación del plano π que tiene a $\vec{v}_1$ y a $\vec{v}_2$ como vectores directores y que pasa por el punto (0, 0. 0).

b) Calcula, si es posible, un valor de k tal que $\vec{v}_3$ sea perpendicular simultáneamente a $\vec{v}_1$ y a $\vec{v}_2$. Justifica tu respuesta.

c) Calcula. si es posible, un valor de k tal que exista un vector $\vec{w}$ perpendicular simultáneamente a los tres vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$. Justifica tu respuesta.