UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOGSE - JUNIO 2006

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. El ejercicio consta de tres bloques de problemas y cada bloque tiene dos opciones. Debe responderse necesariamente a los tres bloques, escogiendo en cada uno de ellos una sola de las opciones (A o B).
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento del problema o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Todas las preguntas se puntúan igual.
4. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables.**

BLOQUE 1

1.A. Considera la función $f: R \to R$ definida por:

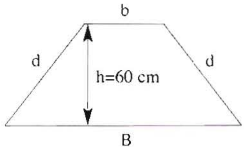
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1} & \text{si} \quad x < 0 \\ a \cdot x + b & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 3 \\ x - 5 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}, \text{con } a \text{ y } b \in R.$$

a) Calcula los valores de a y b para que f sea continua.

b) Para esos valores de a y b, calcula la derivada de f donde exista. Justifica los casos en los que f no sea derivable.

c) En el intervalo $(-\infty, 0)$ estudia la existencia de puntos de corte con los ejes, si la función crece o decrece, la existencia de puntos de inflexión y si tiene asíntotas. Dibuja la gráfica de la función en todo R.

1.B. Se desea diseñar una tabla con forma de trapecio isósceles, que sea de área máxima, que tenga una altura de 60 cm y que la longitud del perímetro menos la longitud de la base mayor mida 280 cm. Determinar las longitudes de todos los lados del trapecio.



BLOQUE 2

2.A. a) Determina la ecuación de un plano α pasando por el punto $A = (-1, -1, 1)$ y siendo $\vec{v} = (1, -2, -1)$ un vector normal al mismo.

b) Determina las ecuaciones paramétricas de la recta r que se obtiene al cortarse el plano del apartado anterior con el plano $\beta \equiv z - 1 = 0$.

c) Determina las ecuaciones paramétricas de la recta s que pasa por los puntos $B = (1, 1, 2)$ y $C = (1, -1, 2)$.

d) Encontrar la posición relativa entre las rectas r y s de los apartados anteriores.

e) Hallar un punto D de la recta r que esté a la misma distancia de los puntos B y C.

2.B. Considera el triángulo que tiene por vértices los puntos $A = (1, 1, 2)$, $B = (1, 0, -1)$ y $C = (1, -3, 2)$.

a) Razona si el triángulo es rectángulo.

b) Calcula la recta r que pasa por B y es perpendicular al lado AC.

c) Calcula la recta s que pasa por los puntos A y C.

d) Si D es el punto de corte de las rectas r y s, calcula el módulo del vector $\overrightarrow{BD}$.

e) Calcula la longitud del lado AC.

f) Calcula el producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$ y comprueba que su módulo es igual a $h.b$, siendo h el módulo del vector $\overrightarrow{BD}$ y b la longitud del lado AC (calculados en apartados anteriores).

BLOQUE 3

3.A. Considera la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix} \quad \text{donde } m \in R.$$

a) Prueba que M es una matriz regular.

b) Para $m = -1$ considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$(M - s \cdot I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

donde $s \in R$ e I es la matriz unidad (identidad) de orden tres.
Resuélvelo según los valores del parámetro s.

c) Para $m = -1$ obtener los vectores $v \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ que verifican:

$M^{-1} \cdot v = r \cdot v$ para algún número real r.

Indicación: *no es necesario calcular M^{-1}, basta probar que $r \neq 0$ y $r^{-1} \cdot v = M \cdot v$ y utilizar el apartado anterior.*

3.B. Una mujer ha obtenido 4.500 euros de beneficio por invertir un total de 60.000 euros en tres empresas: ALFA, BETA y GAMMA. Se sabe que el dinero invertido en la empresa ALFA fue M veces la suma de las cantidades invertidas en las empresas BETA y GAMMA y que los beneficios de la inversión fueron del 5% en la empresa ALFA, 10% en la empresa BETA y 20% en la empresa GAMMA.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita calcular la inversión realizada por la mujer en cada empresa.

b) Prueba que para $M > 0$ el sistema es compatible determinado.

c) Calcula la solución para $M = 2$.