UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOGSE - SEPTIEMBRE 2007

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. El examen consta de tres bloques de ejercicios y cada bloque tiene dos opciones. De cada bloque debe escogerse una sola de las opciones (A o B).
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
4. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables.**

BLOQUE 1

1.A. a) [1,5] Calcula la expresión analítica de una función $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ que verifique las dos condiciones siguientes:

1) $f'(x) = 2x^3 - 6x^2$ para todo $x \in \mathbf{R}$.

2) El valor mínimo de $\{f(x) : x \in \mathbf{R}\}$ es -12.

b) [1] Calcula los puntos de inflexión de la función f y en cada uno de ellos determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f.

c) [1] Justifica en cuántos puntos corta la gráfica de f a los ejes de coordenadas.

Indicación: no es necesario calcular los puntos de corte.

1.B. [3,5] Un hilo de 34 metros se divide en dos trozos para hacer un cuadrado y un rectángulo. Sabiendo que la base del rectángulo mide el doble que su altura y que se usa todo el hilo en las figuras geométricas indicadas, hallar las longitudes de los dos trozos de hilo para que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.

BLOQUE 2

2.A. Considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{r} x + y + mz = 1 \\ mx + (m-1)y + z = m \\ x + y + z = m + 1 \end{array}\right. \quad \text{, donde } m \in \mathbf{R}.$$

a) [1] Determina el carácter del sistema según los valores de m.

b) [1,25] Resuelve el sistema cuando sea compatible determinado.

c) [1] Modifica solamente un coeficiente de la última ecuación para que el sistema resultante sea compatible para cualquier valor de m.

2.B. Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ donde } m \in \mathbf{R}.$$

a) [1] Determina para qué valores de m la matriz A es regular (inversible).

b) [1,25] Para $m = 2$ resuelve los tres sistemas de ecuaciones siguientes:

$AX = e_1$, $\quad AY = e_2 \quad$ y $AZ = e_3$,

donde e_1, e_2 y e_3 son respectivamente la primera, segunda y tercera columna de la matriz unidad (identidad) de orden tres.

c) [1] Calcula la matriz B que cumple: $\frac{1}{3}AB - A = I$ para $m = 2$.

(*Indicación: con los vectores X, Y y Z del apartado anterior puedes construir* A^{-1}).

BLOQUE 3

3.A. Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifica tu respuesta. Para las afirmaciones que consideres que son falsas pon un ejemplo ilustrativo.

a) [1] Si tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ cumplen $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, entonces $\vec{v} = \vec{w}$.

b) [1] No existen dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ cumpliendo $|\vec{v}| = 1$, $|\vec{w}| = 2$ y $|\vec{v} \cdot \vec{w}| = 3$.

c) [1,25] Si tres vectores, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, son linealmente independientes, entonces también lo son los vectores: $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$.

3.B. Considera la recta y los planos siguientes

$$r \equiv \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-1}, \quad \pi_1 \equiv -3x + 2y - z + 2 = 0 \ \text{ y } \ \pi_2 \equiv 2x + 2y - 2z + 3 = 0.$$

a) [1,25] Determina la posición relativa de la recta con respecto a cada uno de los planos.

b) [1] Determina la posición relativa de los dos planos.

c) [1] Calcula la distancia de la recta al plano π_2.