UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOGSE - JUNIO 2008

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. El examen consta de tres bloques de ejercicios y cada bloque tiene dos opciones. De cada bloque debe escogerse una sola de las opciones (A o B).
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
4. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables.**

BLOQUE 1

1.A. Considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + mz = 0 \\ mx + y - z = 0 \\ (m+1)x + z = 0 \end{cases} \text{, donde } m \in \mathbf{R}.$$

a) [1 PUNTO] Determina para qué valores de m el sistema es compatible determinado.

b) [1,25 PUNTOS] Determina para qué valores de m el sistema es compatible indeterminado y calcula todas sus soluciones.

c) [1 PUNTO] Calcula $A^{-1}B$, siendo A la matriz de coeficientes del sistema, $B = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m+2 \end{pmatrix}$ y $m > 3$.

Indicación: no se necesita calcular A^{-1}.

1.B. Se desea hallar los números naturales de tres cifras que cumplen las tres condiciones siguientes:

- La suma de las tres cifras es un múltiplo de 10.
- La suma de las dos primeras cifras es igual a la tercera.
- EL triple de la primera cifra es igual al doble de la segunda.

a) [1,25 PUNTOS] Formula un sistema de ecuaciones lineales adecuado al problema planteado.

b) [1 PUNTO] Comprueba que el sistema formulado es compatible.

c) [1 PUNTO] Determina el número natural de tres cifras que verifica el enunciado propuesto.

BLOQUE 2

2.A. Considera la función $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{|x|}{1 + x^2}$.

a) [1,5 PUNTOS] Estudia su derivabilidad (calcula la derivada donde exista y justifica la no existencia de derivada donde proceda).

b) [0,25 PUNTOS] Comprueba que tiene como eje de simetría el eje de ordenadas (función simétrica respecto OY).

c) [1,75 PUNTOS] Determina el punto de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento, los puntos de inflexión y las asíntotas de f. Haz su representación gráfica.

2.B. Razona si son derivables en el punto $x = 0$ cada una de las dos funciones siguientes:

a) [0,75 PUNTOS] $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

b) [1 PUNTO] $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Justifica si es verdadera o falsa cada una de las afirmaciones siguientes. Para cada afirmación que consideres falsa pon un ejemplo ilustrativo.

c) [0,75 PUNTOS] Si $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ es una función tal que: $\lim_{x \to a^-} h'(x) = \lim_{x \to a^+} h'(x)$, entonces h es derivable en $x = a$.

d) [1 PUNTO] Si una función real de variable real es continua en un punto, entonces es derivable en ese punto.

BLOQUE 3

3.A.

a) [1,25 PUNTOS] Prueba que si dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen el mismo módulo, entonces los vectores $\overline{u + v}$ y $\overline{u - v}$ son ortogonales.

b) Considera los vectores $\vec{x} = (-1,2,3)$ e $\vec{y} = (2,3,-1)$.

1) [0,75 PUNTOS] Razona si son linealmente independientes los vectores $\overrightarrow{x + y}$ y $\overrightarrow{x - y}$.

2) [1,25 PUNTOS] Calcula el área del paralelogramo que tiene tres vértices consecutivos en los puntos: $(1,5,2)$, $(0,0,0)$ y $(-3,-1,4)$.

3.B. Considera las rectas: $r \equiv \begin{cases} x + y - z - 4 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 5 = 0 \end{cases}$

a) [1 PUNTO] Estudia la posición relativa de r y s

b) [1,25 PUNTOS] Halla un punto A de r y otro punto B de s tales que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea perpendicular a ambas rectas.

c) [1 PUNTO] ¿Cuántos cuadrados se pueden construir teniendo un vértice en el punto A y un lado en la recta s? Calcula su área.